Teil 2: Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen wurden und werden zwar traditionell meist für die Lösung technisch-physikalischer Problemstellungen benötigt, andererseits sind sie inzwischen in vielen weiteren Anwendungsgebieten anzutreffen, so dass wir uns im Rahmen einer vertiefenden Analysis-veranstaltung zumindest einen orientierenden Eindruck davon verschaffen sollten, was Differentialgleichungen sind und wie man sie lösen kann.

10 Hinführende Problemstellungen

Mit einigen klassischen Problemstellungen, welche durch Differenzialgleichungen gelöst werden, wollen wir uns dieser Thematik annähern. Dabei soll es zunächst lediglich um die Darstellung dieser Probleme gehen und noch gar nicht um deren Lösung. Sie sollen im Folgenden einen Überblick darüber gewinnen, was denn Differenzialgleichungen überhaupt sind und bei welchen Problemen sie verwendet werden. Sie sollen lernen, die Vielzahl unterschiedlicher Differenzialgleichungen zu klassifizieren, Sie sollen eine graphische Darstellungs- und Lösungsmöglichkeit einfacher Differenzialgleichungen kennen lernen und Sie sollen aus all dem erkennen, was denn die Lösung einer Differenzialgleichung ist und erst allmählich eine Idee davon bekommen, wie man diese tatsächlich löst. Das eigentliche Lösen von Differenzialgleichungen stellen wir aus gutem Grund ganz an das Ende und wir werden im Rahmen dieser Vorlesung auch nur ganz einfache und spezielle Gleichungen lösen.

10.1 Radioaktiver Zerfall

Im Rahmen der Veranstaltung Analysis I hatten wir uns im Rahmen der Übung zu Exponentialfunktionen mit der Halbwertszeit radioaktiver Stoffe befasst. Den Zerfall radioaktiver Stoffe können Sie spielerisch mit der in Aufgabe 1 der zugehörigen Übung formulierten Anweisung nachvollziehen oder simulieren lassen. Es sollte klarwerden, dass die Anzahl der zerfallenden Atome zur Anzahl der vorhandenen Atome proportional ist: Je mehr radioaktive Atome vorhanden sind, umso mehr Atome zerfallen in einer bestimmten Zeiteinheit. Die *Zerfallsrate* dN/dt ist proportional zu der zum jeweiligen Zeitpunkt vorhandenen Anzahl an Atomen N_t:

$$-\frac{dN}{dT} \sim N_t$$

Zwei proportionale Größen bilden einen konstanten Quotienten:

$$\frac{-\frac{dN}{dt}}{N_t} = k$$

Die Konstante k nennt man den *Zerfallskoeffizienten*. Damit ergibt sich die Gleichung für die Zerfallsrate:

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N_t$$

Wir kennen die Zerfallsrate und damit die Änderung der Anzahl noch nicht zerfallener Atome. Wir können damit aber nicht die Anzahl der Atome berechnen, die nach einer vorgegebenen Zeitspanne t noch nicht zerfallen sind.

10.2 Abkühlungsvorgänge

In einer weiteren Übung im Rahmen der Analysis I hatten wir uns mit dem Abkühlungsvorgang einer heißen Flüssigkeit beschäftigt. Bereits Newton hatte sich über Abkühlvorgänge Gedanken gemacht und empirisch gefunden, dass bei geringer Temperaturdifferenz zwischen einem Körper und dessen Umgebungstemperatur die Abkühlgeschwindigkeit dT/dt[7] in guter Näherung proportional zur Temperaturdifferenz $T_t – T_u$ ist:

$$-\frac{dT}{dt} \sim \left(T_t - T_u\right)$$

Die Abkühlgeschwindigkeit hat ein negatives Vorzeichen, da die Temperatur ja abnimmt. Proportional bedeutet *quotientengleich*, damit ist

[7] T ... Temperatur, t ... Zeit

$$\frac{-\frac{dT}{dt}}{T_t - T_u} = k$$

Die Konstante k nennt man den Abkühlkoeffizienten. Es ergibt sich die folgende Gleichung:

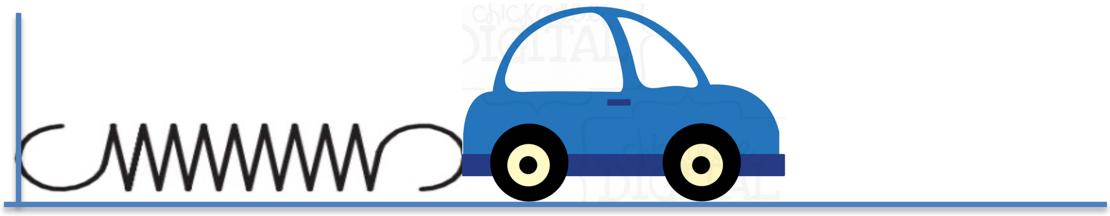
$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T_t - T_u)$$

Die linke Seite der Gleichung – Temperaturänderung pro Zeitintervall – gibt die Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers an. Sie wird umso kleiner, je kleiner die Temperaturdifferenz zur Umgebung wird. Wir können mit dieser Gleichung aber nicht berechnen, wie hoch die Temperatur nach einer bestimmten Zeit der Abkühlung ist.

Nochmals kurz zusammengefasst: Wir kennen die Änderungsrate, aber nicht den konkreten Wert, auf den die Temperatur nach einer bestimmten Zeitspanne abgekühlt ist.

10.3 Das Federpendel

Ein kleines Fahrzeug (Spielzeugauto) mit einer Masse m stehe auf einem exakt horizontalen Tisch und kann reibungsfrei über seine Unterlage fahren. Befestigt ist es an einer Feder; wenn man es auslenkt und loslässt, dann beginnt es hin- und herzufahren.



Nach Newton ist die Summe aller auf eine Masse wirkenden Kräfte gleich Null. Wenn man die Reibung vernachlässigt, dann treten in der geschilderten Anordnung zwei Kräfte auf: Zum einen die Trägheitskraft entgegen der Bewegungsrichtung

$$F_T = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

und zum anderen die Federkraft aufgrund des Hook'schen Gesetzes

$$F_F = D \cdot x = D \cdot x$$

Die Federkraft ist proportional zur Auslenkung, die Proportionalitätskonstante ist die sogenannte Federkonstante D. Die Federkraft ist der Auslenkung entgegengesetzt, damit gilt:

$$F_T + F_F = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0$$

Berücksichtigt man auch noch die Reibung, welche abhängig ist von der Geschwindigkeit

$$F_R = K \cdot v = K \cdot \dot{x},$$

so erhält man die Gleichung

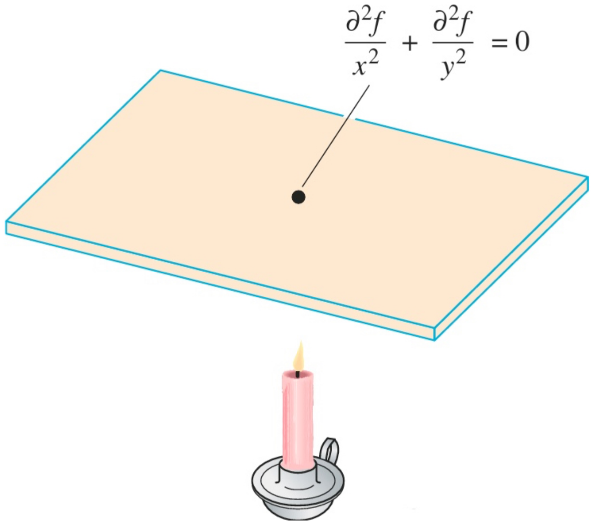
$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot \dot{x} + D \cdot x = 0$$

Dividieren durch m liefert:

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot \dot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0$$

Diese Gleichung beschreibt das schwingende System, sie gibt aber keinen Aufschluss darüber, wo sich das Auto zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet.

10.4 Laplace- und Wellengleichung



In der Übung zu höheren partiellen Ableitungen haben wir die Laplacegleichung kennengelernt. Sie beschreibt Potentiale und stationäre Temperaturverteilungen im Raum und lautet

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

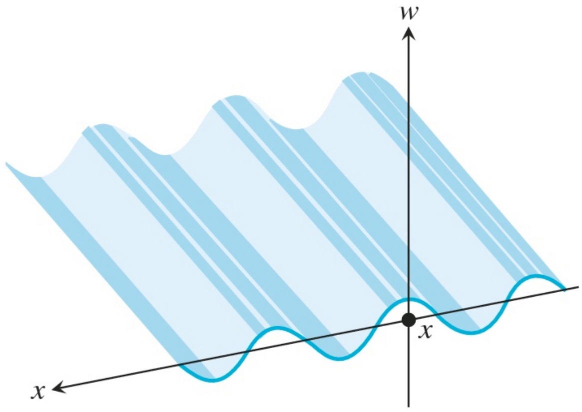
Auf die Ebene beschränkt gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

Es handelt sich dabei um partielle lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese Differenzialgleichung haben wir im Rahmen der Übung nicht gelöst, sondern lediglich gezeigt, dass vorgegebene Funktionen diese Laplacegleichung erfüllen!

Außerdem haben wir an derselben Stelle die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$



beschrieben. Dies ist ebenfalls eine partielle Differentialgleichung. Dabei ist w die Höhe der Welle, x ist die Ortsvariable, t ist die Zeit und c ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellen ausbreiten. Wiederum haben wir nur gezeigt, dass die in der Aufgabe angegebenen Funktionen Lösungen der Wellengleichung sind.

10.5 Zusammenfassung

Die mathematische Beschreibung der obigen Beispiele hat auf Gleichungen geführt, in denen Ableitungen aufgetreten sind:

1. Beim ersten Beispiel des radioaktiven Zerfalls handelte es sich um die Zerfallsgeschwindigkeit und damit um die Frage, wie schnell sich der Bestand an Atomen ändert.
2. Beim Abkühlungsbeispiel ging es um die Frage, wie schnell ein Körper abkühlt, also seine Temperatur ändert.
3. Und beim dritten Beispiel sind ganz offensichtlich die Beschleunigung als zweite und die Geschwindigkeit als erste Ableitung des Ortes nach der Zeit aufgetreten.

Wir halten damit – mathematisch etwas unpräzise, aber für unsere Zwecke zunächst völlig ausreichend – fest, dass in Differenzialgleichungen Aussagen über Änderungen gemacht werden, kurz:

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, in denen Ableitungen auftreten.

Aus den vierten Beispielen mit der Laplace- und der Wellengleichung konnten wir schließen, dass als Lösungen von Differentialgleichungen Funktionen gesucht sind, welche diese Differentialgleichungen erfüllen. Damit haben Differentialgleichungen eine völlig andere Qualität als die seither kennengelernten Gleichungen. Bei den seitherigen Gleichungen ging es immer darum, als Lösungen dieser Gleichungen Zahlen zu finden, welche die Gleichung in eine wahre Aussage überführen.

Die Lösung von Differenzialgleichungen sind hingegen Funktionen.

11 Differenzialgleichungen bei einfachen Bewegungen

11.1 Die gleichförmige Bewegung

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant, das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm zeigt eine waagrechte Linie und es gilt:

$\dot{x}(t) = v_0$ (Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit!)

Die Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeit, d.h., wir müssen diese Gleichung ableiten:

$\ddot{x} = 0$ (Die Ableitung einer Konstanten ist Null!)

Die in der Zeit t zurückgelegte Strecke erhalten wir durch Integrieren der obigen Geschwindigkeits-Gleichung:

$$x(t) = v_0 \cdot t + C$$

Der Term $v_0 \cdot t$ ist die Stammfunktion und C ist die Integrationskonstante. Es handelt sich somit um eine lineare Funktion mit v_0 als Steigung und C als Achsenabschnitt.

Die Integrationskonstante, die man beim rein mathematischen Integrieren häufig unter den Tisch fallen lässt, ist nun ganz wesentlich: Mit der eben hergeleiteten Gleichung erhalten Sie nur dann eine konkrete Aussage über Ihren Aufenthaltsort nach der Zeit t, wenn Sie den Ort angeben, an welchem Sie die Bewegung begonnen haben. Genau dies leistet die Integrationskonstante!

Im Übrigen haben wir damit eine sehr einfache Differenzialgleichung gelöst und es wurde deutlich, dass die Lösung von Differenzialgleichungen Funktionen sind (hier die Funktion $x(t)$) und dass das Lösen von Differenzialgleichungen sehr viel mit dem Integrieren zu tun hat. Lösungen von Differenzialgleichungen nennt man daher auch *Integrale* der Differenzialgleichungen.

11.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung – die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit – konstant:

$$\ddot{x}(t) = a_0$$

Die Geschwindigkeit erhalten wir aus dieser Gleichung durch Integration:

$$\dot{x}(t) = a_0 \cdot t + C_1$$

Integriert man diese Gleichung wiederum nach der Zeit, so erhält man für die zurückgelegte Strecke:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2$$

Jetzt bekommen wir beim Integrieren zwei Integrationskonstanten. Die erste Konstante C_1 ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung beginnt und die zweite Konstante C_2 ist der Ort, an welchem die Bewegung beginnt.

Wieder haben wir eine sehr einfache Differenzialgleichung durch Integrieren gelöst und eine Funktion $x(t)$ erhalten. Ob wir richtig liegen können wir überprüfen, wenn wir die erhaltene Gleichung zweimal differenzieren – dann muss wieder die ursprüngliche Differenzialgleichung erscheinen.

12 Anfangs- und Randwertprobleme

Wir haben eben die Differenzialgleichung

$\ddot{x}(t) = a_0$

gelöst und die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2$$

erhalten. Diese Lösung nennt man auch die *allgemeine Lösung*, da noch zwei Integrationskonstanten enthalten sind und es somit unendlich viele Funktionen gibt, welche die Differenzialgleichung lösen. Nachfolgend drei Beispiele für solche Lösungen:

$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2$ (Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung, wobei wir davon ausgehen, dass die Ausgangsgeschwindigkeit C_1 und der Startort C_2 gleich Null sind.

$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + 4 \cdot t$ (Wahl von C_1=4 und C_2=0)

$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 - 24 \cdot t + 1$ (Wahl von C_1=–24 und C_2=1)

Für C_1 und C_2 kann man prinzipiell beliebige Zahlen aus der Menge R wählen – damit haben wir nicht viel gewonnen, da wir keine spezifische Lösung erhalten haben. Allerdings hatten wir keine spezielle Aufgabe formuliert, dies wollen wir nun nachholen:

Wir wissen, dass unsere konstante Beschleunigung 4 m/s^2 beträgt, damit lautet unsere Ausgangs-Differenzialgleichung

$\ddot{x}(t) = 4$

Wenn wir diese Differenzialgleichung lösen – was wir schon getan haben, wir müssen in unsere allgemeine Lösung nur noch für a_0 den Wert 4 einsetzen – dann erhalten wir:

$x(t) = 2 \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2$ (Ausgangsgleichung)

Außerdem wissen wir noch, dass der sich bewegende Körper am Anfang unserer Betrachtung zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit 100 m/s hat und bereits 500 m vom Startort entfernt ist, es ist also

$\dot{x}(0) = 100 \quad \textit{und} \quad x(0) = 500$

Dies sind die sogenannten *Anfangswerte*.

Wir setzen in der Ausgangsgleichung $t = 0$:

$x(0) = 2 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2$

setzen dann die Anfangsbedingung $x(0) = 500$ ein und erhalten

$C_2 = 500$

Dann leiten wir die Ausgangsgleichung nach t ab:

$\dot{x}(t) = 4 \cdot t + C_1$

Jetzt setzen wir wieder $t = 0$ und erfüllen die Ausgangsbedingung:

$100 = \dot{x}(t) = 4 \cdot 0 + C_1$

Also ist C_1=100

Damit lautet die exakte Lösung unseres Problems:

$x(t) = 2 \cdot t^2 + 100 \cdot t + 500$

Anfangswertprobleme haben somit exakte Lösungen, in denen keine Integrationskonstanten mehr auftauchen. Dies gilt auch für sogenannte *Randwertprobleme*, bei denen Zusatzinformationen für den Beginn und das Ende der Betrachtung vorliegen. Dies setzt natürlich voraus, dass es ein solches *Ende* überhaupt gibt.

13 Arten von Differenzialgleichungen

Wir haben inzwischen eine grobe Vorstellung von Differenzialgleichungen und erste Ideen zu deren Lösung. Die tatsächliche Lösung von Differentialgleichungen ist jedoch keinesfalls trivial. Es existieren mehrere Lösungsverfahren und viele Differenzialgleichungen lassen sich überhaupt nicht analytisch lösen, sondern höchstens numerisch annähern. Um das passende Lösungsverfahren auszuwählen muss man wissen, mit welcher Art von Differenzialgleichung man es zu tun hat.

13.1 Gewöhnliche vs. partielle Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung heißt *gewöhnlich*, wenn in ihr nur nach einer Größe abgeleitet wird. Wir haben bisher meist Funktionen behandelt, die von einer Größe abhängen: Der Preis für Kartoffeln hängt von der gekauften Menge ab, die Strecke, die ein Körper im freien Fall zurückgelegt hat, hängt von der Fallzeit ab usw. Die seitherigen Funktionen waren alle von der Form $f(x)$.

Erst in dieser Veranstaltung haben wir Funktionen kennen gelernt, die von zwei oder mehr Faktoren abhängen: So kann der Kartoffelpreis nicht nur von der Menge, sondern auch von der Sorte abhängen, die Fallstrecke hängt nicht nur von der Fallzeit, sondern auch von der Dichte des durchfallenen Mediums ab. Der Anstieg des Wasserspiegels im Brunnen hängt sowohl vom Brunnendurchmesser als auch vom Kugelvolumen ab. Es gibt also auch Funktionen der Form $f(x, y)$ oder $f(x, y, z)$ – sogenannte Funktionen höherer Ordnung. Solche höherwertigen Funktionen muss man partiell ableiten, Differenzialgleichungen, bei denen nach mehreren Variablen abgeleitet ist, nennt man deshalb *partielle Differentialgleichungen*.

Wir werden uns im Rahmen dieser Veranstaltung ausschließlich mit gewöhnlichen Differenzialgleichungen beschäftigen.

13.2 Lineare vs. nichtlineare Differenzialgleichungen

Hier ist die Namensgebung sehr vertraut: Linear nennt man eine Differenzialgleichung dann, wenn die gesuchte Funktion und deren auftretende Ableitungen nur linear auftreten. Diese Funktion darf also nicht im Quadrat auftreten oder unter der Wurzel stehen oder als Argument einer trigonometrischen Funktion vorkommen: Nachfolgend einige Beispiele für lineare Differenzialgleichungen:

$y'''(x)+2\cdot y''(x)=0$ (lineare Differenzialgleichung mit konstanten Faktoren)

$y''+4y=\cos(x)$ (lineare Differenzialgleichung mit konstanten Faktoren)

$y'''+2y''=\mathrm{e}^{2x}$ (lineare Differenzialgleichung mit konstanten Faktoren)

$x\cdot y''-\sin(x)\cdot y'+y=\mathrm{e}^{x}$ (lineare Differenzialgleichung)

$y'+f(x)\cdot y=g(x)$ (lineare Differenzialgleichung)

$a(x)\cdot y'''+b(x)\cdot y''+c(x)\cdot y'+d(x)\cdot y=e(x)$

(lineare Differenzialgleichung)

Ausgehend vom letzten Beispiel kann man eine formale Schreibweise für lineare Differenzialgleichungen ableiten:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\cdot y^{(k)}(x)=r(x)$$

$y^{(k)}$ sind die gesuchte Funktion bzw. deren Ableitungen. Diese werden mit $a_k(x)$, den Funktionen der unabhängigen Variablen x multipliziert. Auf der rechten Seite kann eine weitere Funktion $r(x)$ stehen.

Hier noch einige Beispiele für nicht lineare Differenzialgleichungen:

$y' + y^2 = 0$ Die Funktion taucht quadratisch auf

$\sqrt{1+y'^2} = y$ Die erste Ableitung taucht quadratisch auf und steht unter der Wurzel

$7 \cdot y'' + \frac{1}{y'} - y = e^{2x}$ Der Kehrwert von y oder einer der Ableitungen taucht auf.

$y(x) \cdot y'(x) = \frac{1}{x}$ Funktion und Ableitung werden miteinander multipliziert.

13.3 Homogenität

Die Frage, ob eine Differenzialgleichung *homogen* oder *inhomogen* ist, stellt sich ausschließlich bei linearen Differenzialgleichungen.

Von homogenen Differenzialgleichungen spricht man, wenn in deren Termen nur die gesuchte Funktion und deren Ableitungen vorkommen. Eine homogene Differenzialgleichung ist beispielsweise

$y''(x) + 4y'(x) - 2y(x) = 0$ oder auch

$$y''(x) - \frac{y'(x)}{x^2} = 4y(x)$$

Inhomogene Differenzialgleichungen sind dagegen beispielsweise

$y''(x) - 3y'(x) = 2x^2$ (hier stört $2x^2$ die Homogenität)

$y''(x) + 3 = y(x)$ (hier ist die Zahl 3 die Inhomogenität)

$y'(x) - \sin(x) \cdot y = b(x)$ (hier ist $b(x)$ die Störfunktion)

Derjenige Term, welcher die Homogenität stört, wird häufig *Störglied* oder – wenn es sich dabei um eine Funktion handelt – *Störfunktion* genannt.

Eine etwas vereinfachte Regel zum Erkennen von homogenen bzw. inhomogenen Differentialgleichungen lautet:

Sortiere alle Ableitungen und die Funktion y selbst auf die linke Seite und alle Terme, die nur von x abhängen nach rechts. Die rechte Seite der Differentialgleichung – falls ungleich Null – ist die Inhomogenität. Sie wird auch Störfunktion genannt.

Ist eine Differenzialgleichung nicht linear, macht eine Klassifizierung nach homogen bzw. inhomogen keinen Sinn, wie das folgende Beispiel zeigt:

Die Gleichung

$$(y'-1)^2 = 0$$

ist homogen, während sie in der ausmultiplizierten Form

$$y'^2 + 2 \cdot y' = -1$$

inhomogen ist.

13.4 Ordnung

Die Ordnung einer Differenzialgleichung gibt die höchste Ableitung an, welche in der Gleichung auftritt:

$\dot{x}(t) = e^{-t}$ 1. Ordnung

$$\frac{d^2V(r)}{dr^2} - 2\frac{dV(r)}{dr} + V(r) = 0 \qquad \text{2. Ordnung}$$

$$y'''(x) \cdot y''(x) - \frac{1}{x^3} \cdot \sqrt{y'(x) - x} = \ln x \qquad \text{3. Ordnung}$$

In manchen Fällen wird auch noch unterschieden, ob eine Differenzialgleichung explizit oder implizit ist. Explizit wird eine Differenzialgleichung genannt, wenn Sie nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist, beispielsweise

$$y''' = \sin(x) \cdot y' - 3 \cdot y = 0$$

Was ist jedoch mit der folgenden Gleichung, ist diese explizit oder implizit?

$$y'' + x^2 = 0 \qquad (1)$$

So wie sie notiert ist, ist sie implizit, da sie nicht nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist. Allerdings lässt sich dies einfach bewerkstelligen:

$$y'' = -x^2 \qquad (2)$$

Hier handelt es sich eindeutig um eine explizite Differenzialgleichung.
Wie ist nun die Ausgangsgleichung

$$y'' + x^2 = 0 \qquad (1)$$

zu bewerten? Hier wird es diffizil... Häufig behilft man sich damit, dass man sagt, Gleichung (1) ist eine explizite DGL in impliziter Darstellung. Wir werden diese Unterscheidung nicht vornehmen, da diese Feststellung für die hier vorgestellten Lösungsverfahren keine Bedeutung hat.

14 Lösungsmöglichkeiten von Differenzialgleichungen

Bei der Lösung von Differenzialgleichungen sucht man diejenige(n) Funktion(en), welche die gegebene Differenzialgleichung in eine wahre Aussage überführen. Wir haben außerdem bereits erfasst, dass das Lösen von Differenzialgleichungen – also von Gleichungen, in denen Ableitungen von Funktionen vorkommen – sehr viel mit dem Integrieren von Funktionen zu tun hat. Wenn Sie also wissen, was *integrieren* bedeutet und zudem noch ein paar Integrationsregeln kennen, dann ist das Lösen von manchen einfachen Differenzialgleichungen gar nicht so schwer und man kann die Lösung in einigen Fällen schon sehen oder leicht erraten.

14.1 Lösen durch Raten

Die einfache, gewöhnliche, lineare, inhomogene Differenzialgleichung von der Ordnung 1

$$y'(x) = 5$$

lässt sich einfach durch Raten – oder besser: genaues Hinschauen – lösen. Vergegenwärtigen Sie sich nötigenfalls zunächst, was diese Gleichung denn aussagt! Sie sagt, dass die Änderungsrate einer Funktion an allen Stellen x gleich Fünf ist. Dies kann also nur eine Gerade mit der Steigung Fünf sein!

Oder aber Sie finden die gesuchte Funktion, indem Sie über x integrieren und erhalten die spezielle Lösung

$$y(x) = 5x$$

beziehungsweise – unter Einbeziehen der Integrationskonstanten die allgemeine Lösung

$$y(x) = 5x + C$$

Sie sehen, ganz triviale Differenzialgleichungen lassen sich tatsächlich auch ganz einfach lösen. Doch wie sieht es mit der Differenzialgleichung

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = 5$$

aus? Diese Gleichung sagt aus, dass die dritte Ableitung der Funktion plus 2-mal die zweite Ableitung plus die erste Ableitung (jeweils an der Stelle x) 5 ergeben soll.

Sehen Sie hierfür auch die spezielle Lösung $y = 5x$?

Machen Sie nötigenfalls die Probe:

Die erste Ableitung dieser Funktion ist 5

Die zweite Ableitung ist 0 und auch das Doppelte der zweiten Ableitung bleibt 0.

Die dritte Ableitung ist ebenfalls 0 und in der Summe erhalten wir die geforderte Zahl Fünf auf der rechten Seite der Gleichung. Da kann man mit etwas Erfahrung durchaus draufkommen!

14.2 Graphische Lösung

Differenzialgleichungen sind tatsächlich sehr abstrakte Gebilde. Es ist ganz allgemein in der abstrakten Mathematik von Vorteil, ein Problem bzw. Lösungsansätze zu skizzieren und graphisch darzustellen. Bei der Arbeit mit Differenzialgleichungen bietet sich diese Vorgehensweise zumindest bei Gleichungen erster Ordnung an, wir wählen für den Einstieg ein sehr einfaches Beispiel:

$$y'(x) = 2x \qquad \text{(Erraten Sie } \textit{en passant} \text{ die Lösung!)}$$

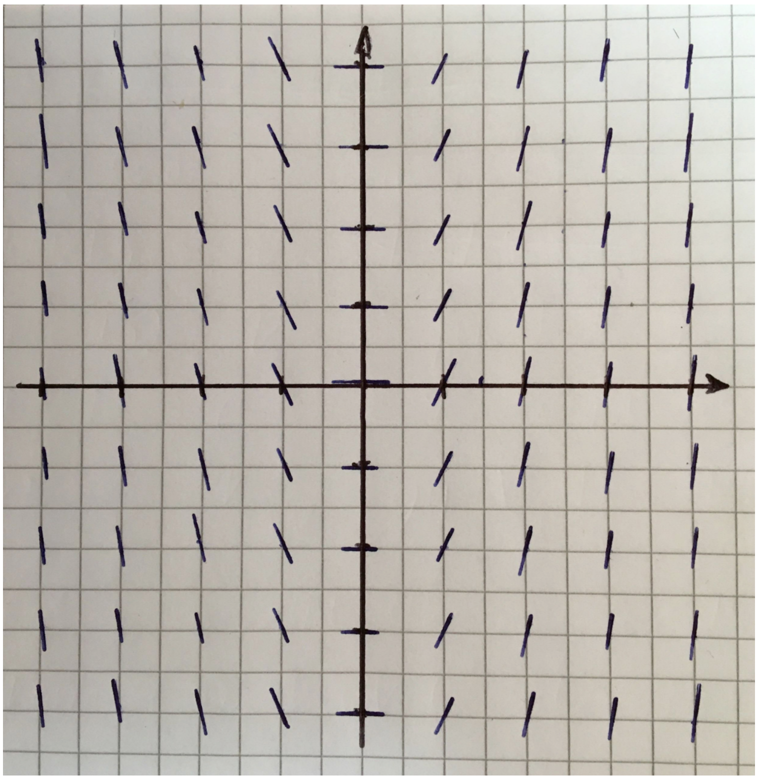
Diese Gleichung drückt aus, dass die erste Ableitung an jeder Stelle x das doppelte dieses x-Wertes ist. Wenn Sie nun noch rekapitulieren, dass die erste Ableitung einer Funktion an einer Stelle x die Steigung der Funktion an dieser Stelle wiedergibt, dann haben Sie bereits die tragende Idee der graphischen Lösung erfasst: Wir ermitteln die Steigungen der Lösungsgleichungen an verschiedenen Stellen im Koordinatensystem. Wir gehen naheliegender Weise planmäßig vor und beschränken uns auf die ganzzahligen Stellen im Koordinatensystem im Bereich von $-4 \leq x \leq +4$ und $-4 \leq y \leq +4$.

Da die Steigung in unserem einfachen Beispiel nur von der x-Koordinate und nicht von der y-Koordinate abhängt, vermindert dies unseren Rechenaufwand beträchtlich. Wir erstellen eine Tabelle:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	(y-Werte haben in diesem Beispiel keinen Einfluss auf die Steigung)								
y'	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8

Die Steigung hat somit an allen Punkten mit der x-Koordinate –4 (und unabhängig von der y-Koordinate) den Wert –8. Die Steigung beträgt allerdings nur genau an den genannten Punkten den Wert –8. Am Punkt mit der x-Koordinate –3.9 haben wir schon eine andere Steigung –7.8. Dies bedeutet, dass wir die Steigungen nur als sehr kleine Linienelemente direkt an den ganzzahligen Koordinaten eintragen dürfen!

Die Gesamtheit der Linienelemente nennt man Richtungsfeld, dieses gibt die Steigungen der Lösungsgleichungen an verschiedenen, diskreten Stellen im Koordinatensystem wieder.



Die eingezeichneten Steigungen kann man ganz gut als „Kompassnadeln" interpretieren, die an den jeweiligen Stellen die Richtung der Lösungsfunktion angeben.

Mit etwas Phantasie (und dem Wissen um die erratene Lösungsfunktion) kann man bereits die Parabelscharen in diesem Richtungsfeld erkennen. Die allgemeine Lösung für die Differenzialgleichung $y'(x) = 2x$ lautet ja

$$y(x) = x^2 + C,$$

es handelt sich damit um lauter in y-Richtung verschobene Normalparabeln, wobei die Integrationskonstante eben genau die Verschiebung in y-Richtung angibt.

Grafisch kann man sich leicht eine Vorstellung von einer bestimmten Lösung machen:

Wir beginnen an einem (grundsätzlich beliebigen) Punkt $[x_0, y_0]=[-3, 4]$ und berechnen aus der Differenzialgleichung die Richtung $y'(x_0)$ an diesem Punkt, diese ist in unserem Fall –6.

Der Richtungsvektor im Punkt [–3, 4] lautet somit $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$. Wir wollen allerdings – ausgehend von unserem Startpunkt – nur ein kleines Stück, sagen wir mal genau einen Schritt, in diese Richtung laufen. Dies bedeutet, dass wir unseren Richtungsvektor auf den Einheitsvektor normieren müssen. Seine Länge beträgt $\sqrt{1^2+(-6)^2}=\sqrt{37}$, der normierte Richtungsvektor ist damit $\frac{1}{\sqrt{37}}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{37}} \\ \frac{-6}{\sqrt{37}} \end{pmatrix}$. Ausgehend von unserem Startpunkt erreichen wir somit den Punkt $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{37}} \\ -\frac{6}{\sqrt{37}} \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} -2,84 \\ 3,01 \end{pmatrix}$.

Wir können damit ein Liniensegment der Länge 1 vom Punkt [–3,–4] zum Punkt [–2.84, 3.01] zeichnen. Dort wiederholen wir diese Vorgangsweise:

Am Punkt [–2.84, 3.01] liefert unser Richtungsfeld gemäß $y'(x)=2x$ die Richtung –5,68.

Der normierte Richtungsvektor lautet (näherungsweise) $\frac{1}{5,77}\begin{pmatrix} 1 \\ -5,68 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 0,17 \\ -0,81 \end{pmatrix}$ und führt uns zum nächsten Punkt $\begin{pmatrix} -2,84 \\ 3,01 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0,17 \\ -0,81 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2,67 \\ 2,2 \end{pmatrix}$. Wir zeichnen das Liniensegment und wiederholen unsere Überlegungen vom erreichten Punkt aus. So erhält man einen Polygonzug, der umso genauer die richtige Lösung wiedergibt, je kleiner die einzelnen Teilschritte sind. Dieses Verfahren zur einfachen numerischen Integration von Differenzialgleichungen ist nach *Euler* benannt.

Durch eine zusätzliche Angabe, die **Anfangsbedingung**, wird somit aus der allgemeinen Lösung eine spezielle Lösung ausgewählt.

Wir erproben diesen Lösungsweg an einem zweiten Beispiel; wieder haben wir eine Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$y'(x)=-\frac{x}{y(x)}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die erste Ableitung der gesuchten Funktion $y(x)$ gleich dem negativen Quotienten aus x-Wert und zugehörigem Funktionswert ist. Damit stecken wir auf den ersten Blick in einer Sackgasse: die Funktion $y(x)$ kennen wir nicht, benötigen diese aber für die Quotientenbildung!

Da die Lösung einer Differenzialgleichung im allgemeinen Fall ohnehin aus unendlich vielen Funktionen besteht, können wir für x und y alle möglichen beliebigen Werte einsetzen und daraus dann die Ableitungen berechnen. Konkret gehen wir wieder so vor, dass wir in den Intervallen $-4 \le x \le +4$ und $-4 \le y \le +4$ die zugehörigen Steigungen berechnen und diese als kleine Linienelemente in das Koordinatensystem eintragen:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–4	–4	–4	–4	–4	–4	–4	–4	–4
y’	–1	–3/4	–1/2	–1/4	0	1/4	1/2	3/4	1

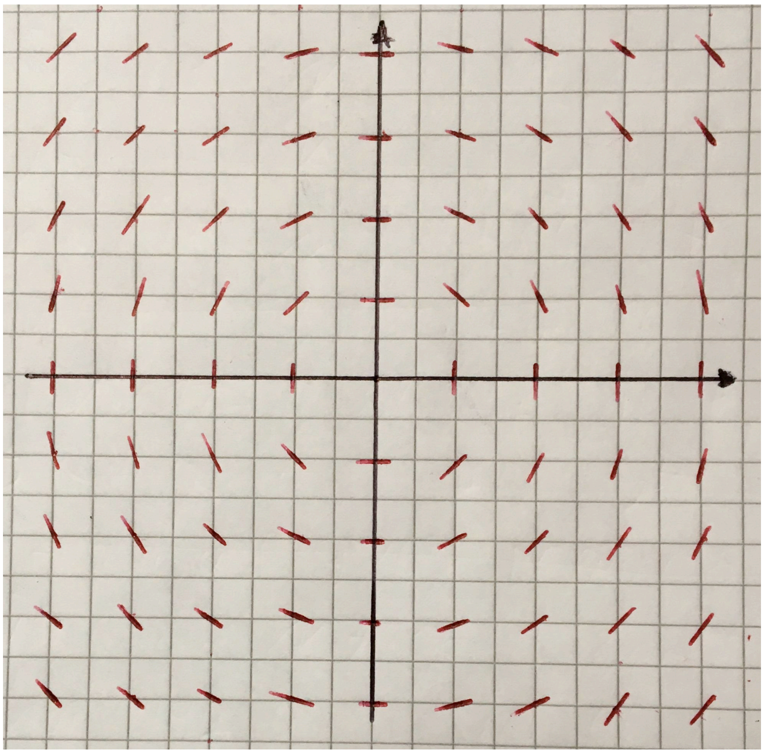
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3
y’	–4/3	–1	–2/3	–1/3	0	1/3	2/3	1	4/3

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–2	–2	–2	–2	–2	–2	–2	–2	–2
y’	–2	–3/2	–1	–1/2	0	1/2	1	3/2	2

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
y’	–4	–3	–2	–1	0	1	1	3	4

Interessant würde es bei der nächsten Teil-Tabelle für y-Werte von Null werden. Durch Null darf man selbstverständlich nach wie vor nicht dividieren. Wenn wir diese Sache aber analytisch angehen – betrachten Sie dazu die bereits ausgefüllten Teiltabellen – so erkennen Sie unschwer, dass für (betragsmäßig) immer kleiner werdende y-Werte die Steigungen immer größer werden. Wenn wir diesen Prozess fortsetzen, dann folgt daraus direkt, dass der Grenzwert für einen Bruch, dessen Nenner gegen Null strebt unendlich wird. Für die Ableitungen und damit die Steigungen der Linienelemente an allen Stellen $y = 0$ folgt damit, dass diese unendlich sind, die Linienelemente sind damit parallel zur y-Achse einzuzeichnen. Mit einer Ausnahme: An der Stelle [0, 0] dürfen wir kein Linienelement zeichnen, da man den Quotienten 0/0 auch nicht auf die eben angedeutete Art und Weise definieren kann. Damit können wir uns die eigentlich folgende Teiltabelle für $y = 0$ sparen, da dort ohnehin alle Steigungen gleich unendlich sind.

Die weiteren ausstehenden Teiltabellen für positive y-Werte sparen wir uns ebenfalls, da wir wissen, dass in diesen Tabellen jeweils nur die Vorzeichen der Steigungen getauscht werden müssen. Wir können somit gleich ans Zeichnen des Richtungsfelds gehen:



Die Lösung der zugrundeliegenden Differenzialgleichung konnten Sie diesmal wahrscheinlich nicht durch Raten herausfinden, trotzdem haben Sie beim Betrachten des Richtungsfelds sofort einige Lösungsideen:

- Die Liniensegmente stehen für konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung.
- Da es sich um eine Differenzialgleichung erster Ordnung handelt und die allgemeine Lösung eine Integrationskonstante enthält, können wir schließen, dass diese Integrationskonstante für die Radien der verschiedenen Kreise stehen kann.
- Es liegt damit nahe, dass jeder Kreis um den Ursprung eine Lösung der Differenzialgleichung sein kann!

Darin liegt nun der besondere Wert dieser Richtungsfelder begründet: Sie stehen für Funktionenscharen und wenn es gelingt, die zugrundeliegenden Graphen den zugehörigen Funktionen zuzuordnen, dann haben wir bereits eine starke Lösungsvermutung gefunden! Gehen Sie wieder so vor, dass Sie ausgehend von einem beliebig gewählten Punkt nach der Euler-Methode einen Graphen skizzieren!

Wir vermuten, dass die allgemeine Lösung der gegebenen Differenzialgleichung durch Kreise um den Koordinatenursprung gegeben ist. Für diese Kreise gilt die implizite Gleichung:

$x^2 + y^2 = r^2$ (mit r ... Kreisradius)

Um unsere Vermutung zu überprüfen, müssen wir diese Gleichung ableiten!

1. Wir leiten x^2 nach x ab und erhalten $2x$.
2. Wir leiten y^2 nach x ab – und fragen uns zunächst, wie das gehen soll ☹?
   Nun, y^2 ist ja eigentlich $(y(x))^2$ und um diese Funktion nach x abzuleiten, benötigen wir die Kettenregel: Die äußere Funktion ist die Quadratfunktion und die innere Funktion ist die Funktion $y(x)$ selbst. Wir erhalten:
   $\frac{d}{dx}\left(y^2(x)\right) = 2y(x)\cdot y'(x)$ BLA^2 ergibt in der Ableitung 2 BLA, also $2y(x)$
   $y(x)$ abgeleitet ergibt $y'(x)$
3. Wir leiten r^2 nach x ab, das ergibt 0, da r nicht von x abhängt.

Die Ableitung der Kreisgleichung ergibt damit insgesamt:

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$$

Stellen wir diese noch etwas um, indem wir nach $y'(x)$ auflösen:

$$2y(x) \cdot y'(x) = -2x$$

$$y'(x) = -\frac{2x}{2y(x)}$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

Damit haben wir unsere Vermutung bestätigt, die Kreisgleichung ist tatsächlich die Lösung der gegebenen Differenzialgleichung.

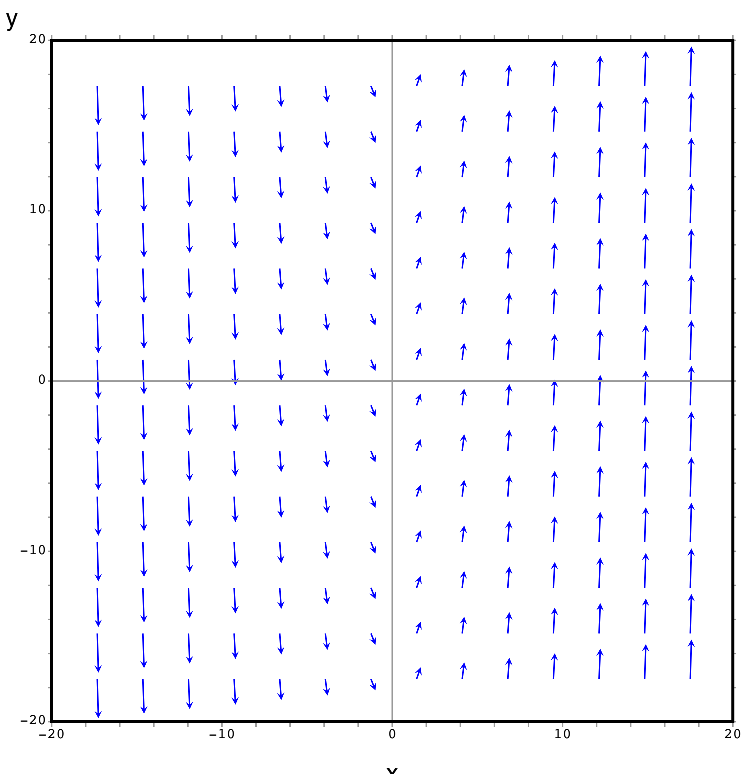
Dem unbestreitbaren Vorteil, dass solche Richtungsfelder elegant auf die allgemeine Lösung von Differenzialgleichungen führen, steht der hohe zeichnerische Aufwand für ihre Erstellung gegenüber. Diese Verquickung schreit förmlich danach, Richtungsfelder mit dem PC erstellen zu lassen! In der Tat bietet Maxima eine einfache Möglichkeit hierfür: Die Maxima-Funktion

```
plotdf()
```

erzeugt auf einfache Weise Richtungsfelder. Die Funktion geht davon aus, dass die Differenzialgleichung nach $y'(x)$ aufgelöst ist und erwartet den Term auf der anderen Seite der Gleichung als Aufrufparameter.

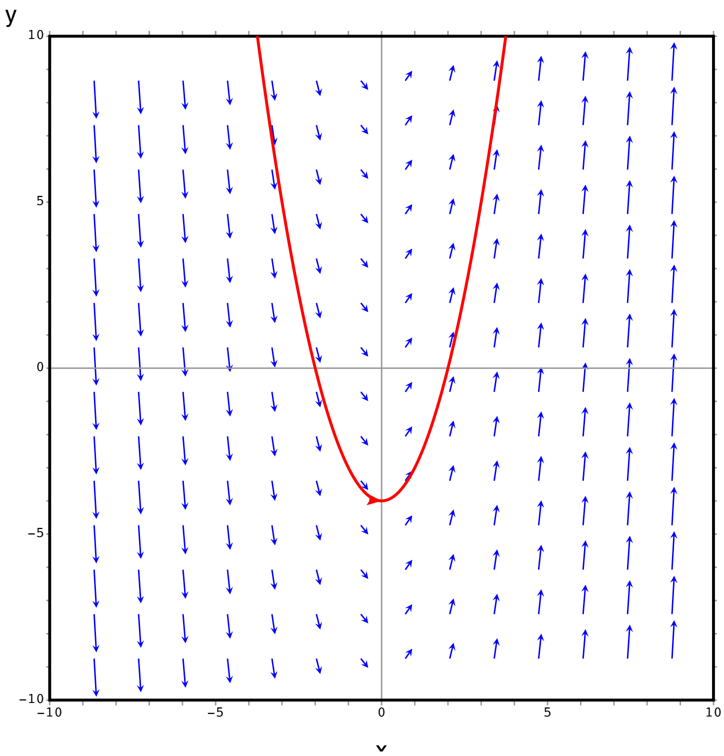
Unser erstes Beispiel $y'(x) = 2x$ wird in Maxima mit dem folgenden Aufruf dargestellt:

```
plotdf(2*x,[x,-20,20],[y,-20,20]);
```



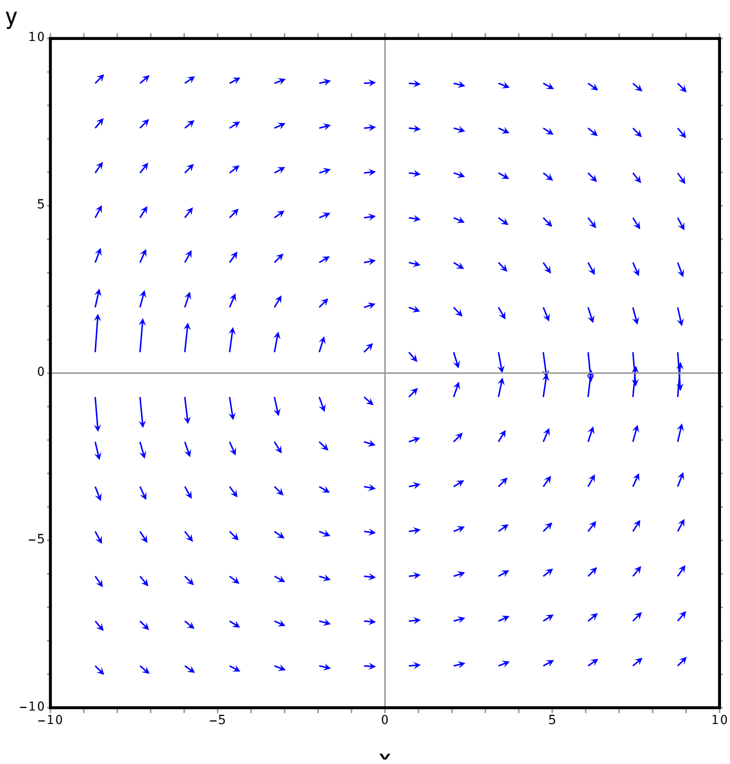
Die Funktion ist noch weitaus mächtiger, so kann man sich beispielsweise eine spezielle Lösung anzeigen lassen. Diese Bahnkurve, welche eine Lösung einer Differenzialgleichung darstellt, nennt man Trajektorie. Angegeben werden muss lediglich der Punkt, durch welchen die Trajektorie verlaufen soll:

```
plotdf(2*x,[x,-10,10],[y,-10,10],[trajectory_at,0,-4]);
```



Schließlich lassen wir noch unser zweites Beispiel mit Hilfe von Maxima darstellen:

```
plotdf(-x/y,[x,-10,10],[y,-9.9,10]);
```



Hier muss man aufpassen, dass Maxima nicht in die „Division durch Null"-Falle tappt! Maxima berechnet ja die verschiedenen „Kompassnadeln" für diskrete Stellen. Wenn man nun den in diesem Fall kritischen y-Bereich von -10 bis $+10$ festsetzt, dann unterteilt Maxima diesen Bereich in gleichmäßige Intervalle und man bekommt das Problem, dass eine Intervallgrenze genau auf null liegt und es zum Divisionsfehler kommt. Dem kann man abhelfen, indem man – wie oben angegeben –den kritischen Bereich ein klein wenig modifiziert.

14.3 Lösung von Differenzialgleichungen mit Hilfe des Computers

Nachdem wir nun bereits die Hilfe des Computers in Anspruch genommen haben, sei noch gleich verraten, dass dieser mit entsprechenden Programmen nicht nur Richtungsfelder zeichnen, sondern natürlich auch Differenzialgleichungen lösen kann. Bei der Lösung von Differenzialgleichungen gibt es eine enorme Spanne: Wir haben bereits ganz einfach Beispiele durch Raten und mit Hilfe grafischer Visualisierung gelöst. Am anderen Ende des Spektrums stehen allerdings ungemein schwierige Aufgabenstellungen, die sich nur mit viel Mühe lösen lassen und mache Probleme sind so komplex, dass man gar keine geschlossene Lösung mehr auf analytischem Weg finden kann, diese Probleme lassen sich dann nur numerisch lösen. Bei den letztgenannten Problemen ist schon aus Zeitgründen die Inanspruchnahme eines Computers ökonomisch. Wir werden daher an dieser Stelle bereits die Möglichkeiten von Maxima demonstrieren, uns aber im nachfolgenden Kapitel mindestens aus Gründen eines tieferen Verständnisses mit einigen ausgewählten Lösungsmöglichkeiten beschäftigen.

Wir beschränken uns bei Inanspruchnahme der Rechnerhilfe auf gewöhnliche Differenzialgleichungen, die im Englischen *ordinary differential equation* genannt und häufig mit *ode* abgekürzt werden. Entsprechend heißt die in Maxima verfügbare Funktion zur Lösung von Differenzialgleichungen `ode2()`. Ihre Syntax lautet:

`ode2(`*`eqn`*`, `*`dvar`*`, `*`ivar`*`)`

Die Funktion `ode2` löst eine gewöhnliche Differentialgleichung der ersten oder zweiten Ordnung. Die Funktion hat drei Argumente: Die Differentialgleichung *eqn*, die abhängige Variable *dvar* und die unabhängige Variable *ivar*.

Zunächst sollte man in Maxima eine Differenzialgleichung erstellen. Dies macht man mit Hilfe der `diff()`-Funktion, der ein einfaches Hochkomma vorangestellt werden muss.

Die Aufrufe für unser erstes Beispiel zur graphischen Darstellung $y'(x)=2x$ lautet folgendermaßen:

```
(%i28)  dgl1:'diff(y,x)=2·x;
```

(dgl1) $\frac{d}{d\,x}\,y=2\,x$

```
(%i29)  ode2(dgl1,y,x);
```

(%o29) $y=x^2+\%c$

Das zweite Beispiel lösen wir mit:

```
(%i30)  dgl2:'diff(y,x)=-x/y;
```

(dgl2) $\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{x}{y}$

```
(%i31)  ode2(dgl2,y,x);
```

(%o31) $-\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\%c$

Daran, dass `ode2()` nur gewöhnliche Differenzialgleichungen bis zur Ordnung 2 verarbeitet, können Sie bereits erkennen, dass die analytische Lösung von Differenzialgleichungen nicht trivial ist. Für unseren ersten Einblick soll dies aber genügen, Sie haben damit eine einfache Möglichkeit bei der Hand, manuell erstellte Lösungen schnell überprüfen zu können.

15 Rechnerische Lösung von Differenzialgleichungen

Abschließend wollen wir noch einen Einblick in die Lösung von Differenzialgleichungen gewinnen. Zu den einfacheren Fällen gehören lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung. Letzteres bedeutet, dass ausschließlich erste Ableitungen (und keine höheren auftreten).

15.1 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine solche Differenzialgleichung hat die allgemeine Form:

$$y'(x)+g(x)\cdot y(x)=r(x)$$

Links stehen die erste Ableitung der Funktion und die Funktion selbst, letztere kann mit einer beliebigen Funktion $g(x)$ multipliziert werden, die allerdings nur von x abhängen darf (sonst wäre sie nicht mehr linear). Diese Funktion $g(x)$ kann auch eine Konstante oder im einfachsten Fall gleich 1 oder gar gleich 0 sein.

Auf der rechten Seite steht die sogenannte *Störfunktion* $r(x)$. Ist eine solche tatsächlich vorhanden, wobei sie auch eine Konstante sein kann, dann haben wir es mit einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung zu tun. Tritt diese Funktion nicht auf – steht auf der rechten Seite somit die Null – dann ist es eine homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung. Und mit einer Lösungsmöglichkeit für solche Differentialgleichungen wollen wir beginnen.

15.1.1 Homogene Gleichungen

15.1.1.1 Erstes Beispiel *TdV*

Nach diesen einführenden und eher allgemeinen Bemerkungen zur Lösung linearer Differentialgleichungen erster Ordnung soll nun ein Verfahren vorgestellt werden, mit welchem solche Differentialgleichungen gelöst werden können. Dieses Verfahren ist unter der Bezeichnung *Trennung der Variablen* (*TdV*) bekannt und besteht aus fünf Schritten. Wir werden diese fünf Schritte anhand eines Beispiels aufzeigen.

Gegeben sei die lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y'(x)+x\cdot y(x)=0$$

Hinweis: Es kann für den nachfolgenden Schritt 2 (die eigentliche Trennung der Variablen) sinnvoll sein, die gegebene Gleichung gleich nach $y'(x)$ aufzulösen: $y'(x)=-x\cdot y$!

1. Schritt: Man schreibt statt $y'(x)$ den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und statt $y(x)$ nur y:

$$\frac{dy}{dx}+x\cdot y=0$$

2. Schritt: Man bringt alle Terme(!), welche die Variable x enthalten (also auch dx) auf die rechte Seite und alle Terme, welche die Variable y enthalten (auch dy) auf die linke Seite:

$$\frac{dy}{dx}=-x\cdot y$$

$$dy=-x\cdot dx\cdot y$$

$$\frac{dy}{y}=-x\cdot dx$$

$$\frac{1}{y}\cdot dy=-x\cdot dx$$

Genau nach diesem Schritt, in welchem wir die Variablen auf die beiden Seiten der Gleichung trennen, ist dieses Verfahren benannt. Allerdings kann es durchaus vorkommen, dass eben

diese Trennung der Variablen nicht funktioniert! Dann können wir dieses Verfahren insgesamt nicht anwenden.
Führen Sie die Schritte 1 und 2 nochmals mit der umgeformten Differentialgleichung $y'(x) = -x \cdot y$ durch. Sie sollten natürlich zum selben Ergebnis kommen!
In beiden Fällen haben wir durch y dividiert, müssen somit den Fall $y = 0$ später separat untersuchen.
3. Schritt: Man schreibt auf beiden Seiten vor die Terme ein Integralzeichen.

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int -x \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = -\int x \cdot dx$$

4. Schritt: Man integriert nun beide Seiten. Beim Bilden des allgemeinen Integrals darf man die Integrationskonstanten nicht vergessen!
Die linke Seite $\frac{1}{y}$ nach y aufgeleitet ergibt nach den Integrationsregeln $\ln y + C_y$ und da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist, schreiben wir $\ln|y| + C_y$.
Die rechte Seite x nach x aufgeleitet ergibt $-\frac{1}{2} \cdot x^2 + C_x$, wir erhalten:

$$\ln|y| + C_y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + C_x$$

Wir haben die hier die beiden Integrationskonstanten C_y und C_x explizit hingeschrieben, um den korrekten Vorgang des Integrierens darzustellen. Beim praktischen Rechnen geht man allerdings so vor, dass die beiden Integrationskonstanten zu einer Konstanten C' zusammengefasst und auf die rechte Seite geschrieben werden:

$$\ln|y| = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + C'$$

5. Schritt: Schließlich wird die erhaltene Gleichung – falls möglich und sinnvoll – nach y aufgelöst.
Um in diesem Beispiel nach y auflösen zu können, müssen wir beide Seiten in die Potenz von e nehmen:

$$e^{\ln|y|} = e^{\left(-\frac{1}{2}x^2 + C'\right)}$$

Damit erhalten wir auf der linken Seite wie gewünscht y bzw. $|y|$. Auf der rechten Seite wenden wir die Potenzgesetze an:

$$|y| = e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot e^{C'}$$

Nun stören noch die Betragsstriche. Je nachdem, ob die rechte Seite der Gleichung positiv oder negativ ist, müssen wir diese mit –1 multiplizieren. Für y gilt somit, dass es $\pm e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{C'}$ sein kann:

$$y = \pm e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{C'}$$

$$y = \pm e^{C'} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Da der Faktor $\pm e^{C'}$ alle beliebigen Werte in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ annehmen kann, nennen wir diesen Wert schließlich C:

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Damit ist unsere Differentialgleichung allgemein gelöst.
Selbst wenn $C = 0$ sein sollte, erhalten wir mit $y = 0$ eine Lösung unserer Differentialgleichung $y'(x) + x \cdot y(x) = 0$.

15.1.1.2 Zweites Beispiel *TdV*

Wir wenden das Verfahren *TdV* an einem weiteren Beispiel an:
Gegeben ist die lineare homogene Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x)$$

Wir blenden an dieser Stelle aus, dass eine Lösung auch leicht durch Raten gefunden werden kann und wenden konsequent die fünf Schritte an.

1. Schritt: Man schreibt statt $y'(x)$ den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und statt $y(x)$ nur y:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

2. Schritt: Man bringt alle Terme, welche die Variable x enthalten (also auch dx) auf die rechte Seite und alle Terme, welche die Variable y enthalten (auch dy) auf die linke Seite:

$$\frac{1}{y}dy = dx$$

3. Schritt: Man schreibt auf beiden Seiten vor die Terme ein Integralzeichen.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int dx$$

4. Schritt: Man integriert nun beide Seiten. Beim Bilden des allgemeinen Integrals darf man die Integrationskonstanten nicht vergessen!

Tipp: Schreiben bzw. lesen Sie auf der rechten Seite $\int 1dx$!

$$\ln|y| = x + C'$$

Die beiden Integrationskonstanten wurden hier gleich zusammengefasst.
5. Schritt: Schließlich wird die erhaltene Gleichung – falls möglich und sinnvoll – nach y aufgelöst.
Hierzu müssen wir wieder beide Terme in die Potenz von e erheben:

$$e^{\ln|y|} = e^{(x+C')}$$

$$|y| = e^x \cdot e^{C'}$$

$$y = \pm e^x \cdot e^{C'}$$

$$y = \pm e^{C'} \cdot e^x$$

Nun schreiben wir wieder $\pm e^{C'} = C$ und erhalten

$$y = C \cdot e^x$$

als Lösung unserer Differentialgleichung.

Für $C=0$ erhalten wir $y=0$ und das ist offensichtlich auch eine Lösung unserer Differentialgleichung.

Im Vorgriff sei angemerkt, dass auch nicht-lineare Differentialgleichungen – die ja nicht nach homogen oder inhomogen unterschieden werden – manchmal durch die Methode *TdV* gelöst werden können. Die Anwendbarkeit dieser Methode hängt somit grundsätzlich ganz einfach davon ab, ob in der gegebenen DGL die Variablen getrennt werden können oder nicht!

15.1.2 Inhomogene Gleichungen

Für lineare inhomogene Differentialgleichungen muss das Lösungsverfahren erweitert werden.

Stufe 1: Die gegebene lineare inhomogene Differentialgleichung wird durch Entfernen des Störglieds in eine lineare homogene Differentialgleichung umgewandelt und durch das bekannte *TdV*-Verfahren allgemein gelöst.

Stufe 2: Mit dem Verfahren der *Variation der Konstanten* (*VdK*) erhält man eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Stufe 3: Beide Lösungen werden zur allgemeinen Lösung addiert.

15.1.2.1 Erstes TdK-VdK-Beispiel

Wir zeigen dieses Schema am Beispiel der linearen und inhomogenen Differentialgleichung

$$y'(x)+\frac{y(x)}{x}=\frac{\sin x}{x}.$$

Stufe I: Überführen in eine homogene Gleichung durch Entfernen des Störglieds und Anwendung des TdV-Verfahrens.

Das Störglied ist der Bruch auf der rechten Seite, wir lassen ihn einfach wegfallen und erhalten die homogene Gleichung

$$y'(x)+\frac{y(x)}{x}=0.$$

Diese lösen wir wie gehabt:

1. Schritt: $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$

2. Schritt: $\frac{1}{y}\cdot dy=-\frac{1}{x}\cdot dx$

3. Schritt: $\int\frac{1}{y}\cdot dy=-\int\frac{1}{x}\cdot dx$

4. Schritt: $\ln|y|=-\ln|x|+C'$

5. Schritt: $e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+C'}$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|}\cdot e^{C'}$$

$$|y|=e^{C'}\cdot\frac{1}{|x|}$$

$$y=\pm e^{C'}\cdot\frac{1}{x}$$

$$y=\frac{C}{x}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x)$ lautet somit

$$y_h(x) = \frac{C}{x}$$

Stufe II: Nun kommt das Verfahren *VdK* zum Einsatz, dieses läuft ebenfalls in 5 Schritten ab.

1. Schritt: Man verwendet als Ansatz die eben gefundene allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_h(x) = \frac{C}{x}$. Allerdings soll dort die gefundene Konstante C keine Konstante, sondern abhängig sein von x und somit eine Funktion $C(x)$ sein. Daher auch der Name des Verfahrens: *Variation der Konstanten*. Für die partikuläre Lösung schreiben wir also:

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x}$$

2. Schritt: Man berechnet die erste Ableitung der Funktion $y_p(x)$, wofür wir hier die Quotientenregel verwenden (oder Maxima befragen):

$$y_p{}'(x) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x) \cdot 1}{x^2}$$

3. Schritt: Wir haben damit eine Gleichung für die partikuläre Lösung $y_p(x)$ und eine Gleichung für die Ableitung der partikulären Lösung $y_p{}'(x)$ erhalten. Damit ersetzen wir $y(x)$ und $y'(x)$ in der ursprünglichen linearen nichthomogenen Differentialgleichung $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{\sin x}{x}$. Wir erhalten zunächst

$$y_p{}'(x) + \frac{y_p(x)}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

und substituieren nun mit den entsprechenden Ausdrücken:

$$\frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{\frac{C(x)}{x}}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

Schließlich müssen wir den erhaltenen Ausdruck so lange umformen, bis wir eine Differentialgleichung $C'(x) = \ldots$ erhalten. Dazu multiplizieren wir zunächst mit x:

$$\frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} = \sin x$$

Den linken Bruch kann man auseinanderziehen, dann heben sich gleiche Terme weg:

$$\frac{C'(x) \cdot x}{x} - \frac{C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} = \sin x$$

$$C'(x) = \sin x$$

4. Schritt: Man löst die erhaltene Differentialgleichung $C'(x) = \ldots$, wobei keine Integrationskonstante berücksichtigt werden muss, da man ja nur an einer partikulären Lösung interessiert ist:

$$C(x) = -\cos x$$

5. Schritt: Man setzt das erhaltene $C(x)$ in den Ansatz für $y_p(x)$ aus dem 1. Schritt ein:

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x}\text{, also:}$$

$$y_p(x) = \frac{-\cos x}{x}$$

Damit haben wir eine partikuläre Lösung gefunden.

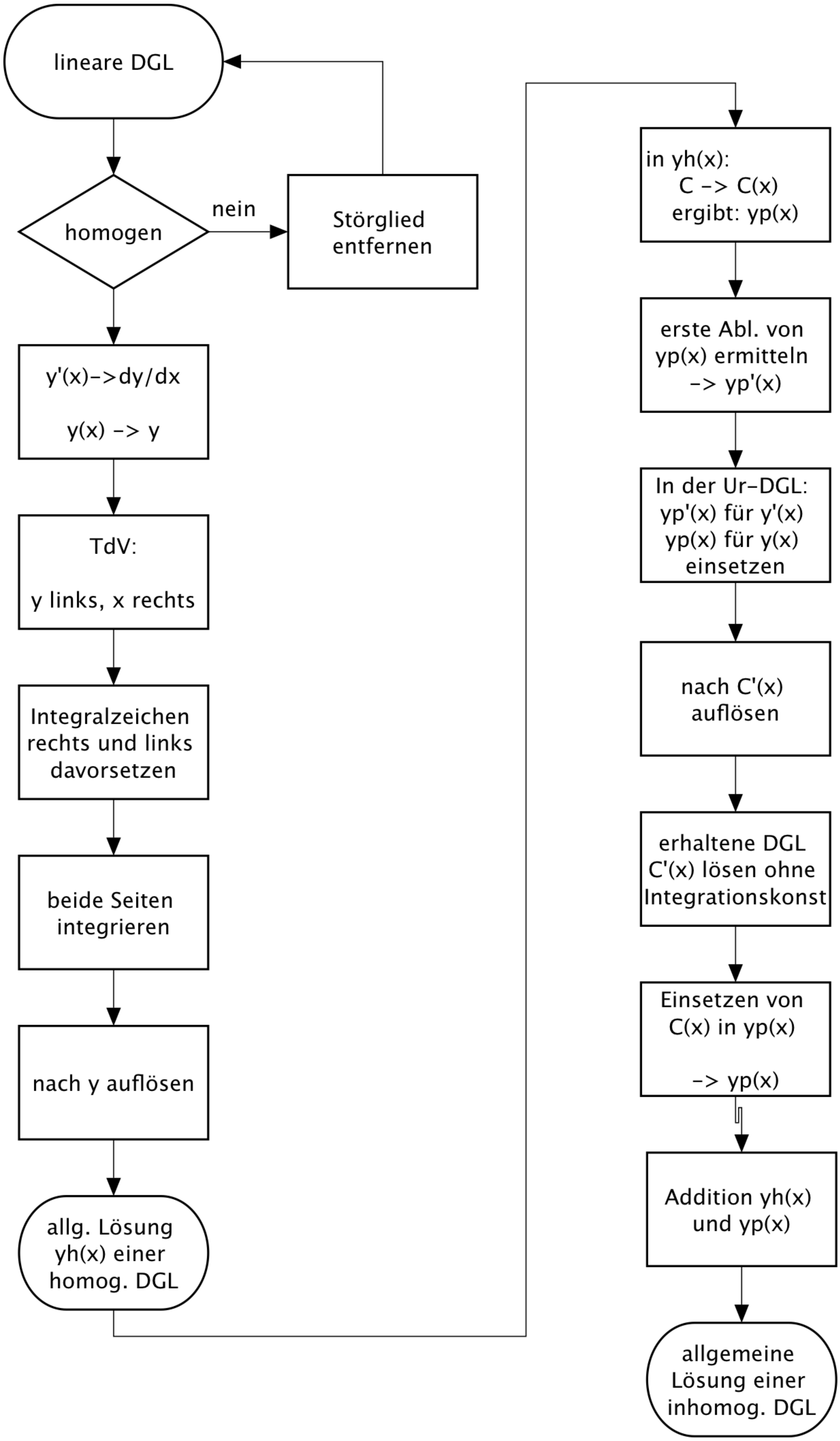
Stufe III: Addition der beiden Lösungen zur gemeinsamen Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = \frac{C}{x} - \frac{\cos x}{x}$$

15.1.3 Zusammenfassung

Für die Lösung linearer Differentialgleichungen gibt es somit ein Verfahren, das häufig für homogene und inhomogene Gleichungen angewendet werden kann. Ist die gegebene Gleichung nicht homogen, so führt man sie zunächst in eine homogene Gleichung über, indem man das Störglied einfach auf null setzt. Das gesamte Verfahren ist unten als Flussdiagramm dargestellt.


lineare DGL
homogen
nein
Störglied entfernen
y'(x)->dy/dx
y(x) -> y
TdV:
y links, x rechts
Integralzeichen rechts und links davorsetzen
beide Seiten integrieren
nach y auflösen
allg. Lösung yh(x) einer homog. DGL
in yh(x):
C -> C(x)
ergibt: yp(x)
erste Abl. von yp(x) ermitteln -> yp'(x)
In der Ur-DGL: yp'(x) für y'(x) yp(x) für y(x) einsetzen
nach C'(x) auflösen
erhaltene DGL C'(x) lösen ohne Integrationskonst
Einsetzen von C(x) in yp(x)
-> yp(x)
Addition yh(x) und yp(x)
allgemeine Lösung einer inhomog. DGL

15.2 Nicht-lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Lassen sich die beiden Variablen (gewöhnlich y und x oder t) in der Gleichung trennen, so kann auch für die Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen die Methode TdV angewandt werden.

15.3 Abschließende Anmerkungen

15.3.1 Umgang mit der Integrationskonstanten

Die in den obigen Beispielen durchgeführten Umformungen und Umbenennungen der auftretenden Integrationskonstanten mag manchmal willkürlich erscheinen. Deshalb hierzu noch eine Anmerkung.

Beim Umgang mit der Integrationskonstanten muss lediglich darauf geachtet werden, dass vor und nach der Umbenennung derselbe *Lösungsvorrat* für die Lösung vorhanden ist. Es ist beispielsweise problemlos möglich, die nachfolgenden Umbenennungen durchzuführen:

$$2 \cdot C' = C \qquad \text{und} \qquad \ln C' = C$$

In beiden Fällen können Sie sowohl für C als auch für C' Elemente aus ganz $\mathbb{R}$ einsetzen. Damit ist es egal, ob Sie C oder C' schreiben.

Nicht möglich wäre beispielsweise:

$$C'^2 = C$$

Während C' ganz $\mathbb{R}$ durchläuft, enthält C nur $\mathbb{R}^+$.

Die Umbenennung

$$\pm e^{C'} = C$$

ist erlaubt, wenn der Fall $C = 0$ gesondert untersucht wird:

Wenn Sie auf der linken Seite der Gleichung für C' alle Elemente von $\mathbb{R}$ einsetzen, dann erhalten Sie auf der linken Seite der Gleichung auch alle Werte aus $\mathbb{R}$ – die Null natürlich ausgenommen!

Wenn Sie nun $\pm e^{C'} = C$ schreiben, dann kommt die Null in den Wertevorrat dazu, weil die Integrationskonstante per se beliebig, d.h. aus ganz $\mathbb{R}$ gewählt werden kann. Deshalb muss dann der Fall $C = 0$ gesondert untersucht werden!

15.3.2 Umformung der Gleichung

Der letzte Schritt im TdV-Verfahren lautet, die erhaltene Gleichung nach y aufzulösen. Hier muss man aber überlegen, ob diese Auflösung nach y in jedem Fall sinnvoll ist! Wie Sie wissen, gibt es explizite und implizite Funktionsbeschreibungen. Von einer expliziten Funktion reden wir, wenn diese in der Form $y = ...$ geschrieben wird. Dies gilt für lineare Funktionen und Polynomfunktionen und damit für die meisten Funktionstypen, die Sie bisher kennengelernt haben.

Denken Sie aber auch daran, dass eine Kreisgleichung bzw. allgemeiner eine Kegelschnittgleichung auch eine Funktion darstellt, diese aber immer implizit formuliert ist, etwa in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad (x - x_0) + (y - y_0) = r^2$$

Eine solche Gleichung kann man zwar auch mittels $y = \pm\sqrt{...}$ in die explizite Form umwandeln, allerdings ist sie in der impliziten Form (für den Kenner) aussagekräftiger!

16 Anfangswertprobleme

16.1 Hinführende Betrachtungen

16.1.1 Gleichförmige Bewegung

Aus der Physik kennen Sie die Formel

$$s = v \cdot t$$

als Bewegungsgleichung für eine gleichförmige Bewegung. Mit deren Hilfe können Sie berechnen, welchen Weg ein sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegender Gegenstand in der Zeit t zurücklegt. Wenn beispielsweise die Geschwindigkeit mit $v = 10\frac{m}{s}$ festgelegt ist, so kann man der Zeitdauer $t = 5s$ unschwer den zurückgelegten Weg s mit $50m$ zuordnen. Falls Sie aber feststellen, dass sich der Gegenstand tatsächlich $100m$ fortbewegt hat, so ist die einzige Erklärung dafür, dass der Körper seinen Weg nicht an der Stelle 0, sondern an der Stelle 50 begonnen hat, dass er also schon einen „Vorsprung“ hatte.

Wenn Sie nochmals auf die obigen Betrachtungen im Kapitel 11 zurückblicken, dann haben wir dort die Bewegungsgleichung aus der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = v_0 \qquad \text{(Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit!)}$$

hergeleitet und durch Integration die Formel

$$x(t) = v_0 \cdot t + C$$

erhalten.

Der Term $v_0 \cdot t$ ist die Stammfunktion und C ist die Integrationskonstante.

Die Integrationskonstante C steht somit in unserem Beispiel für den Ort, an dem sich der Gegenstand zu Beginn der Zeitmessung befindet – und dies muss natürlich nicht zwangsläufig der Nullpunkt sein!

Wenn wir jedoch wissen, dass sich ein Gegenstand mit einer gegebenen konstanten Geschwindigkeit von $v = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bewegt, diese Bewegung bereits $t = 5\mathrm{s}$ andauert und der Gegenstand danach am Ort 100 m angekommen ist, so können wir diese Werte in die Bewegungsgleichung $x(t) = v_0 \cdot t + C$ einsetzen

$$100\mathrm{m} = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 5\mathrm{s} + C$$

und daraus allgemein die Integrationskonstante C und in unserem speziellen Beispiel den Startort des Gegenstandes berechnen. Damit haben wir aus der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung

$$x(t) = v_0 \cdot t + C$$

eine Lösung des Anfangswertproblems mit $t = 5s$ und $x(t) = 100$ erhalten:

$$x(t) = v_0 \cdot t + 50\mathrm{m}$$

Um solche Anfangswertprobleme zu lösen, benötigt man allgemein für Differentialgleichungen erster Ordnung ein zugeordnetes Wertepaar, in unserem Beispiel t und $x(t)$.

16.1.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Wir bleiben bei den Bewegungsgleichungen der Physik. Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung haben Sie im Physikunterricht die Formel

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

kennengelernt. In Kapitel 11 hatten wir auch die Herkunft dieser Beziehung geklärt:

Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung – die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit – konstant:

$$\ddot{x}(t) = a_0$$

Die Geschwindigkeit erhalten wir aus dieser Gleichung durch Integration:

$$\dot{x}(t) = a_0 \cdot t + C_1$$

Integriert man diese Gleichung wiederum nach der Zeit, so erhält man für die zurückgelegte Strecke:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2$$

Jetzt bekommen wir beim Integrieren zwei Integrationskonstanten. Die erste Konstante C_1 ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung beginnt und die zweite Konstante C_2 ist der Ort, an welchem die Bewegung beginnt. Spielen wir einmal diese gleichmäßig beschleunigte Bewegung anhand des freien Falls mit ein paar einfachen Zahlen durch:

Wir wissen, dass die Fallbeschleunigung $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beträgt.

Wenn wir den Gegenstand 5 s fallen lassen, dann wird er in dieser Zeit eine Strecke von 125 m durchfallen – wobei wir hierbei stillschweigend voraussetzen, dass wir den Gegenstand aus dem Nullpunkt unseres Maßsystems und aus der Ruhelage heraus haben fallen lassen!

Wenn wir jedoch nach der Fallzeit von 5 s feststellen, dass der Gegenstand nach dieser Zeit bereits am Ort 200 m angekommen ist, dann gibt es hierfür drei Ursachen:

1. Der Gegenstand wurde bereits „weiter unten“ (am Ort 75 m) fallen gelassen.

2. Der Gegenstand wurde zwar im Nullpunkt gestartet, allerdings wurde ihm beim Start gleich eine Geschwindigkeit nach unten mitgegeben.

3. Schließlich ist noch eine Kombination beider Fälle möglich: Der Gegenstand wurde nicht im Nullpunkt und dort mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit auf die Reise geschickt.

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden die Zusammenhänge somit gleich komplexer. Um solche Differentialgleichungen entsprechend der nun zwei auftretenden Integrationskonstanten eindeutig lösen zu können, benötigen wir somit auch zwei zugeordnete Wertepaare Beispiel t und $x(t)$. Kennen Sie beispielsweise die Wertepaare

$t_0 = 2$ und $x(t_0) = 65$ sowie

$t_1 = 3$ und $x(t_1) = 100$,

so können wir das Gleichungssystem

$$65m = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot (2s)^2 + C_1 \cdot 2s + C_2$$

$$100m = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot (3s)^2 + C_1 \cdot 3s + C_2$$

aufstellen und dieses lösen, was in diesem Fall für $C_1 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und für $C_2 = 25\mathrm{m}$ ergibt.

Für die exakte Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung benötigt man somit 2 Anfangsbedingungen und man kann unschwer extrapolieren, dass immer genau *n* Anfangsbedingungen gegeben sein müssen, um eine Differentialgleichung *n*-ter Ordnung exakt zu lösen.

16.2 Rechnerische Lösung von Anfangswertproblemen

16.2.1 Erstes Beispiel

Die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = y(x)$$

haben wir bereits mit

$$y(x) = C \cdot e^x$$

bestimmt. Wenn wir nun die Anfangsbedingung

$$y(0) = 1$$

kennen, so setzen wir diese Werte in die allgemeine Lösungsfunktion ein

$$1 = C \cdot e^0$$

und errechnen daraus für C unschwer den Wert 1. Die exakte Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$y(x) = e^x$$

16.2.2 Zweites Beispiel

Wir hatten auch die Differentialgleichung

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

bereits bearbeitet und deren allgemeine Lösung

$$x^2 + y^2(x) = C$$

gefunden. Mit der Anfangsbedingung

$$y(1) = 2$$

wird daraus

$$1^2 + 2^2 = C$$

und es folgt

$$C = 5.$$

Wir hatten bereits festgestellt, dass es sich bei der gefundenen allgemeinen Lösung um implizite Funktionsgleichungen von Kreisen um den Ursprung handelt. Mit den gegebenen Anfangsbedingungen erhalten wir konkret einen solchen Kreis mit dem Radius $\sqrt{5}$.

16.2.3 Lösung von Anfangswertproblemen mit Maxima

Mit Maxima können Anfangswertprobleme – zumindest in der von uns bearbeiteten Komplexität – ebenfalls gelöst werden. Voraussetzung ist hierfür die von Maxima ermittelte Lösung einer DGL, beispielsweise:

```
dgl:'diff(y,x)=-x/y
dgl_loes:ode2(dgl,y,x);
```

Für DGL 1. Ordnung wird das Anfangswertproblem mit der Funktion Funktion `ic1()` gelöst. `ic1()` hat die Syntax:

```
ic1 (solution, xval, yval)
```

`solution` ist die mit `ode2()` ermittelte Lösung, `xval` und `yval` sind die Koordinaten des Anfangswerts in der Form `x=...,y=...`. Der Aufruf lautet somit:

```
ic1(dgl_loes,x=1,y=2);
```

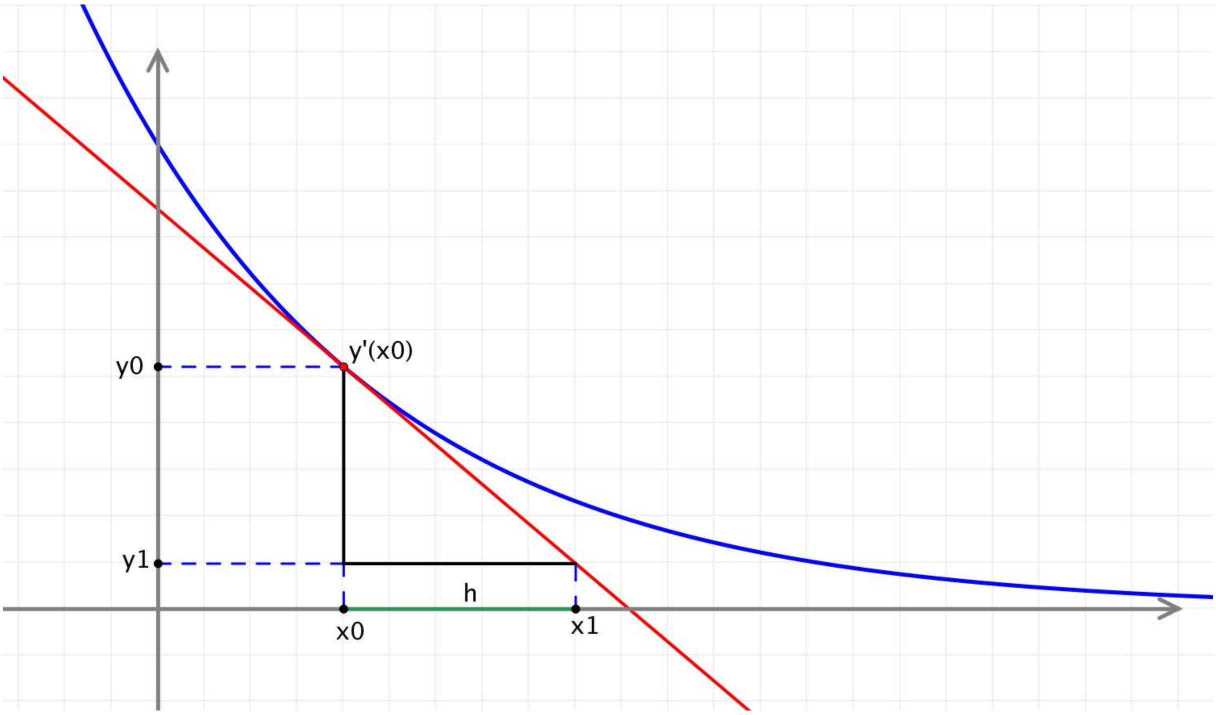
Als Ergebnis erhält man diejenige Funktion, welche den Anfangswert enthält.

16.3 Das Eulerverfahren

Mit dem Eulerverfahren kann man Anfangswertprobleme von Differentialgleichungen erster Ordnung näherungsweise berechnen. Unter Umständen kann die exakte Lösung analytisch nicht bestimmt werden. Dann behilft man sich so, dass man – ganz ähnlich wie bei den Richtungsfeldern – Steigungen ermittelt und diese iterativ aneinandersetzt.

16.3.1 Prinzipielles Vorgehen

Das Prinzip des Eulerverfahrens ist in der folgenden Skizze dargestellt:



Da das Eulerverfahren für Anfangswertprobleme von Differentialgleichungen erster Ordnung angewandt werden kann, bedeutet dies, dass wir eine nach $y'(x)$ aufgelöste Differentialgleichung sowie eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ vorliegen haben.

Mit dem Euler-Verfahren kann daraus eine ganz spezielle Lösung der DGL in einem beliebigen anderen Punkt x ermittelt werden.

Der Graph der unbekannten Funktion ist in der Skizze als blaue Linie dargestellt.

Die Steigung $y'(x)$ des Graphen an der Stelle x_0 – also $y'(x_0)$ – kann aus der rechten Seite der Differentialgleichung bestimmt werden, genau wie wir das bei der Ermittlung der Richtungsfelder getan haben. Damit erhalten wir die Steigung der roten Tangenten im Punkt x_0.

Wir kennen somit – ausgehend von der Anfangsbedingung $[x_0, y_0]$ einen Punkt auf dem Graphen und wir können aufgrund der gegebenen Differentialgleichung die Steigung an diesem Punkt bestimmen.

Wenn wir nun ein kleines Stück der Länge h auf der x-Achse nach rechts weiterlaufen, dann kommen wir zum Punkt x_1. Dessen zugehörige tatsächliche y-Koordinate kennen wir nicht, da wir ja die gesuchte Funktion als Lösung der DGL nicht kennen. Aber: Wir können aus der Anfangsbedingung $[x_0, y_0]$ und der dortigen Steigung den Funktionswert y_1 von x_1 auf der Tangenten berechnen!

In dem eingezeichneten Steigungsdreieck gilt:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y'(x) \qquad \text{(nach der Def. des Steigungsdreiecks: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = m\text{)}$$

Da $x_1 = x_0 + h$ gilt, folgt daraus auch:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_0 + h - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} = y'(x)$$

Daraus folgt für y_1:

$$y_1 = y'(x_0) \cdot h + y_0$$

Aus der Anfangsbedingung $[x_0, y_0]$ sowie der Steigung $y'(x_0)$ am Ausgangspunkt x_0 haben wir so einen genäherten Punkt $[x_1, y_1]$ erhalten. Machen wir mit diesem Punkt genau dasselbe, so erhalten wir einen weiteren genäherten Punkt $[x_2, y_2]$. So können wir weiter machen, bis wir an dem Punkt $[x, y]$ angelangt sind, für den wir eine konkrete, spezielle Lösung suchen.

16.3.2 Das Eulerverfahren im Beispiel

Am besten schauen wir uns die Vorgehensweise an einem Beispiel an.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x) + 1 \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad y(0) = 1.$$

Gesucht ist der Wert der gesuchten Funktion an der Stelle $x = 1$.

Wir wählen zu Demonstrationszwecken die Schrittweite $h = 0{,}25$. Diese Schrittweite wäre im Ernstfall natürlich viel zu groß gewählt und würde ein sehr ungenaues Ergebnis liefern!

1. Eulerschritt:

Ausgehend von der Stelle $[x_0, y_0] = [0, 1]$ (unserer Anfangsbedingung) machen wir den ersten Eulerschritt:

Wir setzen dazu $[x_0, y_0] = [0; 1]$ in die gegebene DGL ein und bestimmen damit $y'(x_0)$:

$$y'(x_0) = 0^2 \cdot 1 + 1 = 1$$

Damit und den Werten für $[x_0, y_0]$ errechnen wir für y_1:

$$y_1 = y'(x_0) \cdot h + y_0$$
$$y_1 = 1 \cdot 0{,}25 + 1$$
$$y_1 = 1{,}25$$

Damit sind wir an der Stelle $x_1 = 0{,}25$ angelangt.

2. Eulerschritt:

Es folgt der zweite Eulerschritt:

Jetzt setzen wir die erhaltenen Werte $[x_1, y_1] = [0{,}25; 1{,}25]$ in die DGL ein und bestimmen $y'(x_1)$:

$$y'(x_1) = 0{,}25^2 \cdot 1{,}25 + 1 = 1{,}078125$$

Damit errechnen wir y_2:

$$y_2 = y'(x_1)\cdot h + y_1$$
$$y_2 = 1{,}078125 \cdot 0{,}25 + 1{,}25$$
$$y_2 = 1{,}51953125$$

Damit sind wir an der Stelle $x_2 = 0{,}5$ angelangt.

3. Eulerschritt:

$[x_2, y_2] = [0{,}5; 1{,}51953125]$ in die DGL einsetzen:

$$y'(x_2) = 0{,}5^2 \cdot 1{,}51953125 + 1 = 1{,}37988281$$

Berechnen von y_3:

$$y_3 = y'(x_2)\cdot h + y_2$$
$$y_3 = 1{,}37988281 \cdot 0{,}25 + 1{,}51953125$$
$$y_3 = 1{,}86450195$$

Damit sind wir an der Stelle $x_3 = 0{,}75$ angelangt und benötigen noch einen letzten Schritt.

4. Eulerschritt:

$[x_3, y_3] = [0{,}75; 1{,}86450195]$ in die DGL einsetzen:

$$y'(x_3) = 0{,}75^2 \cdot 1{,}86450195 + 1 = 2{,}04878235$$

Berechnen von y_4:

$$y_4 = y'(x_3)\cdot h + y_3$$
$$y_4 = 2{,}04878235 \cdot 0{,}25 + 1{,}86450195$$
$$y_4 = 2{,}37669754$$

Jetzt sind wir endlich an der gewünschten Stelle $x_4 = 1$ angelangt und haben dort den genäherten Wert $y_4 = 2{,}37669754$ gefunden.

Das Verfahren als solches ist nicht schwer, aber aufwändig! Die obigen Werte wurden zwar mit dem Taschenrechner ermittelt, trotzdem war der Zeitbedarf dafür noch erheblich. Wenn man jetzt in Betracht zieht, dass realistische Näherungen nur mit einer kleineren Schrittweite erzielt werden können, wird schnell klar, dass dafür nur ein maschinelles Rechnen in Frage kommen kann.

16.3.3 Das Eulerverfahren in EXCEL

Solche iterativen Vorgänge wie das Eulerverfahren lassen sich gut in EXCEL abbilden. In der nebenstehenden Abbildung wurde eine Schrittweite von 0,1 gewählt und damit das Ziel nach 10 Iterationen erreicht. Das Ergebnis beträgt nun 2,542... .

Eingegeben werden die Anfangsbedingungen $[x_0, y_0]$ sowie die Schrittweite. Die Formel zur Berechnung der jeweiligen Steigung nach der DGL ist in Spalte C hinterlegt, die Bestimmung des genäherten y-Werts nach dem Steigungsdreieck erfolgt immer gleich in Spalte D.

	A	B	C
1	Eulerverfahren		
2	Schrittweite	0,1	
3			
4	xn	yn	y'(xn) (nach DGL)
5	0	1	1
6	0,1	1,1	1,011
7	0,2	1,2011	1,048044
8	0,3	1,3059044	1,117531396
9	0,4	1,41765754	1,226825206
10	0,5	1,54034006	1,385085015
11	0,6	1,67884856	1,604385482
12	0,7	1,83928711	1,901250684
13	0,8	2,02941218	2,298823794
14	0,9	2,25929456	2,830028592
15	1	2,54229742	3,542297417

Die Formel für die Ableitung $y'(x)$ und damit die momentane Steigung in Spalte C muss jeweils angepasst werden. Sie lautet in diesem Fall:

	A	B	C
1	Eulerverfahren		
2	Schrittweite	0,1	
3			
4	xn	yn	
5	0	1	=A5^C52*B5+1

Die Formel zur Berechnung des neuen y-Werts in Spalte B ist immer gleich:

	A	B	C
1	Eulerverfahren		
2	Schrittweite	0,1	
3			
4	xn	yn	y'(xn) (nach DGL)
5	0		
6	0,1	=C5*B2+B5	

Der x-Wert in Spalte A wird einfach entsprechend der Schrittweite hochgezählt.

16.3.4 Das Eulerverfahren mit Maxima

Für kleinere Schrittweiten wird auch die Bestimmung in EXCEL unhandlich. Hier bietet sich ein Abbilden des Eulerverfahrens in Maxima an.

Der Wert der Differentialgleichung hängt von x und y ab. Man definiert daher global die gegebene DGL:

```
dgl(x,y):=x^2*y+1
```

und bestimmt den gewünschten Näherungswert in einer Schleife:

```
eulerverfahren(anfang,schritt,ende):=block(
[x,y],
[x,y]:anfang,
while x<ende do
(
    y:float(dgl(x,y)*schritt+y),
    x:x+schritt
),
[x,y]
);
```

Verkleinert man die Schrittweite auf $\frac{1}{100}$, so erhält man den Näherungswert 2.669..., wählt man gar $\frac{1}{1000}$ als Schrittweite, so wird das Ergebnis 2.683... geliefert. Bei $\frac{1}{10000}$ sind es 2.6850... .