uebung_abb_geo_01_l.docx: Abbildungen

1. Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3, 7\}$ und $B = \{$Gmünd, Herlikofen, Heubach, Waldstetten, Weißenstein$\}$.

a) Bilden Sie das Kreuzprodukt $A \times B$ beider Mengen.

b) Bilden Sie eine Teilmenge des Kreuzprodukts mit denjenigen Paaren, für welche die Aussage
Bus-Linie ... fährt nach ...
eine richtige Aussage ergibt.

c) Stellen Sie ein Pfeilbild beider Mengen mit der Zuordnungsvorschrift *Linie ... fährt nach ...* dar und untersuchen Sie die Relation auf ihre Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, rechtseindeutig.

2. Relationen R aus einer Menge A in eine Menge B kann man im Hinblick auf die Eigenschaften *linkstotal*, *rechtstotal*, *linkseindeutig* und *rechtseindeutig* untersuchen.

a) Geben Sie an, wie sich jede dieser Eigenschaften in den unterschiedlichen Darstellungsformen der *Paarmenge*, der *Ankreuztabelle* und im *Pfeildiagramm* auswirkt.

b) Wie müssen die Paarmenge, die Ankreuztabelle bzw. das Pfeildiagramm aussehen, damit die jeweilige Eigenschaft verletzt, also nicht erfüllt ist?

c) Wie viele verschiedene Relationstypen gibt es im Hinblick auf diese vier Eigenschaften, z.B. den Typ „nicht linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, nicht rechtseindeutig“?

3. Gegeben sei die Relation ... *ist parallel zu* ... auf der Menge der Geraden einer Ebene.

a) Begründen Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt!

b) Was ist das Besondere an Äquivalenzrelationen? Beziehen Sie diese Besonderheit auf die vorgegebene Relation!

4. Funktionen (Abbildungen) aus A in B sind stets linkstotal und rechtseindeutig.

a) Wie kann man dies beweisen (Denken Sie gründlich nach!)?

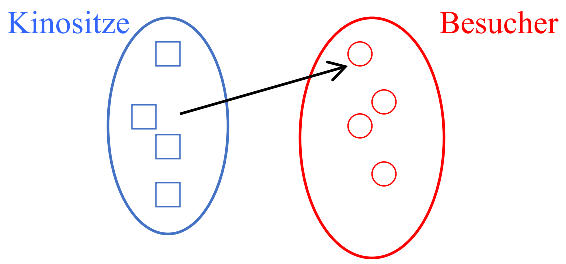
b) Es gibt eine injektive (linkseindeutige) Funktion f: $A \to B$. Was können Sie über die Elementeanzahlen r von A bzw. s von B aussagen ($|A| = r$; $|B| = s$)?

c) Beantworten Sie die vorhergehende Frage für eine surjektive (rechtstotale) und dann für eine bijektive Funktion.

5. Zuordnungen lassen sich nach dem folgenden Muster in acht Bereiche untergliedern. Finden Sie für jeden Bereich mindestens zwei Beispiele aus dem Alltag.

<table>
<tr><th colspan="8">Zuordnungen</th></tr>
<tr><th colspan="5">berechenbar</th><th colspan="3">nicht berechenbar</th></tr>
<tr><td colspan="2">je mehr, desto mehr</td><td colspan="2">je mehr, desto weniger</td><td rowspan="2">andere</td><td rowspan="2">je mehr, desto mehr</td><td rowspan="2">je mehr, desto weniger</td><td rowspan="2">andere</td></tr>
<tr><td>proportional</td><td>nicht proportional</td><td>anti-proportional</td><td>nicht anti-prop.</td></tr>
</table>

6. Wir stellen zwischen der Menge der Sitze in einem Kino und den Kinobesuchern eine Zuordnung her, indem wir jedem Kinositz diejenige Person „zuordnen“, die auf dem jeweiligen Sitz Platz genommen hat.



Erläutern Sie anhand dieses Beispiels die nachfolgenden Eigenschaften einer Zuordnung. Dabei sollen Sie nicht erklären, ob die dargestellte Zuordnung die genannten Eigenschaften aufweist, sondern ganz **realitätsnah** erläutern, was denn der Fall ist, wenn die genannte Zuordnung die jeweilige Eigenschaft besitzt bzw. nicht besitzt, wie also die jeweilige Eigenschaft in der Realität sichtbar wird!

a) linkstotal – nicht linkstotal
b) rechtseindeutig – nicht rechtseindeutig
c) injektiv – nicht injektiv
d) surjektiv – nicht surjektiv
e) bijektiv
f) Vertauschen Sie beide Mengen (Besucher links, Sitze rechts) und stellen Sie erneut dar, durch welche beobachtbaren Auswirkungen die aufgeführten Eigenschaften in der Realität des Kinos sichtbar werden!

7. Überlegen Sie, wo überall in der Umwelt es reale linkstotale und rechtseindeutige Zuordnungen (Funktionen) gibt. Zählen Sie mindestens 5 Beispiele auf!

a) Überprüfen Sie zuerst, ob alle Ihre Beispiele linkstotal und rechtseindeutig sind!
b) Welche Beispiele sind zusätzlich rechtstotal?
c) Welche sind linkseindeutig?
d) Welche sind bijektiv?

8. Zeichnen Sie eine einfache Figur (Haus, Stern, ...) so in ein Koordinatensystem, dass die Eckpunkte auf den Gitterpunkten liegen.

a) Bilden Sie nun jeden (Eck-)Punkt ab, indem Sie dessen Koordinaten $[a, b]$ ermitteln und den Bildpunkt an der Stelle $[2a, 2b]$ eintragen.
b) Was für eine Abbildung haben Sie damit geschaffen?

9. Gegeben ist die Menge der natürlichen Zahlen N, die auf sich selbst abgebildet wird. Die Zuordnungsvorschrift besagt, dass dabei jede Zahl sich selbst zugeordnet wird; also die 1 auf die 1, die 2 auf die 2, die 3 auf die 3 usw.

a) Zeichnen Sie – in Ansätzen – ein Pfeilbild.
b) Welche der vier diskutierten Eigenschaften hat diese Zuordnung?
c) Handelt es sich dabei um eine Relation?
d) Handelt es sich gar um eine Funktion?
e) Lässt sich die Umkehrabbildung erstellen?
f) Finden Sie einen treffenden Namen für solch eine spezielle Zuordnung?

10. Eine Kamera ist ein physikalisches Gerät, welches Bilder und damit Abbildungen erzeugt, indem es die Punkte eines Bereichs der dreidimensionalen Umwelt auf einen Ausschnitt einer zweidimensionalen Ebene abbildet.

a) Schildern Sie anschaulich was passiert, wenn die Zuordnung, die Ihre Kamera erzeugt, nicht *linkstotal* ist.

b) Was ist anschaulich der Fall, wenn die Zuordnung Ihrer Kamera nicht *rechtseindeutig* ist?

c) Ist die Zuordnung einer intakten Kamera *rechtstotal*?

d) Ist die Zuordnung einer intakten Kamera linkseindeutig?

uebung_abb_geo_02_1.docx: Kongruenzabbildungen

1. Führen Sie je eine Achsenspiegelung, eine Verschiebung und eine Drehung konkret konstruktiv durch, indem Sie eine beliebige Figur abbilden. Die bestimmenden Größen der jeweiligen Abbildung (Achse, Vektor, Winkel, ...) können Sie frei wählen.

a) Geben Sie zu jeder Abbildung einen Konstruktionstext an, der die Abbildung eines Punktes exakt beschreibt.

b) Untersuchen Sie, ob es sich bei den drei Abbildungen tatsächlich um linkstotale und rechtseindeutige Zuordnungen und damit um Funktionen im mathematischen Sinn handelt.

c) Sind die drei Abbildungen injektiv? Sind sie surjektiv? Sind sie bijektiv?

d) Welche Invarianten haben die drei Abbildungen?

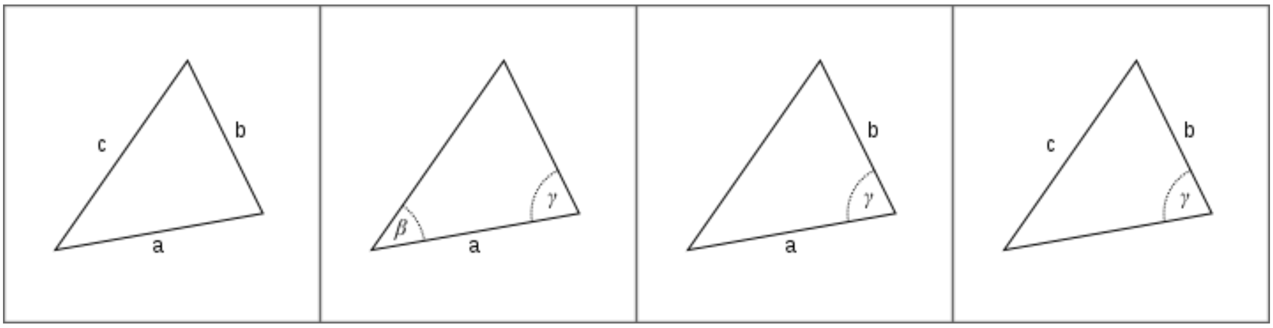
e) Welche Fixobjekte (Fixpunkte, Fixgeraden, ...) gibt es bei jeder der genannten Abbildungen?

f) Haben die untersuchten Abbildungen *Fixrichtungen*? Falls ja, welche?

g) Warum nennt man diese drei Abbildungen Kongruenzabbildungen?

2. Welche Möglichkeiten gibt es zur enaktiven Durchführung einer Achsenspiegelung – beispielsweise als Hinführung in einer Schulklasse?

3. Nennen Sie die Kongruenzsätze für Dreiecke.



4. Zeichnen Sie zwei kongruente Dreiecke in beliebiger Orientierung an zwei verschiedenen Stellen Ihres Zeichenpapiers.

a) Durch welche konkreten Kongruenzabbildungen können Sie Ihre beiden Dreiecke zur Deckung bringen?

b) Schaffen Sie es, die beiden Dreiecke nur durch Spiegelungen zur Deckung zu bringen?

c) Wie viele Spiegelungen benötigen Sie mindestens, wie viele höchstens?

d) Was halten Sie von der folgenden Definition:
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn Sie durch eine endliche Anzahl von Kongruenzabbildungen aufeinander abgebildet werden können?

5. Spiegeln Sie ein Quadrat jeweils mittels einer der folgenden Abbildungsvorschriften an einer Geraden:

a) Die Spurgeraden (Gerade durch Urbild- und Bildpunkt) sollen entgegen einer herkömmlichen Achsenspiegelung nicht senkrecht auf der Spiegelachse stehen, sondern diese unter einem Winkel von 60° scheiden.

b) Die Achse soll die (senkrecht zu ihr liegende) Strecke von Urbild- zu Bildpunkt nicht halbieren, sondern im Verhältnis 1 : 2 teilen.

c) Schließlich kombinieren Sie beide Vorgaben, d.h. die Achse wird von den Spurgeraden unter einem Winkel von 60° geschnitten und sie teilt die Verbindungsstrecken im Verhältnis 1 : 2.

d) Handelt es sich bei diesen Abbildungen auch um Kongruenzabbildungen? Handelt es sich überhaupt um Abbildungen? Sind sie bijektiv?

6. Gegeben sind ein beliebiges Dreieck und eine Gerade g. Spiegeln Sie das Dreieck an g und das entstehende Bild hernach wieder an g.

7. Wie hoch muss ein Spiegel mindestens sein, damit sich ein Mensch von 1,80 m Körpergröße ganz darin spiegeln kann?

8. Auf einem Billardtisch liegen zwei Billardkugeln.

a) Wie muss man die eine zentral (ohne Effet) stoßen, damit sie nach Reflexion an einer Bande zentral auf die zweite trifft?

b) Wie muss man stoßen, damit die zweite Kugel nach zweimaliger Reflexion an verschiedenen Banden getroffen wird?

c) Wie können Sie über 3 Banden spielen?

9. Das Feuerwehrproblem: An welcher Stelle X muss die Feuerwehr an den Fluss f fahren, damit ihr Weg vom Depot D zur Wasserentnahmestelle X und von dort zum Brandherd B (auf derselben Seite des Flusses wie D) möglichst kurz ist.

10. Ein Bambusstab knickt ab und seine Spitze S trifft an der Stelle P auf den Boden. An welchem Punkt K ist er abgeknickt? Grenzen Sie zunächst den Bereich ab, in welchem die Spitze den Boden berühren kann. Lösen Sie diese Aufgabe geometrisch konstruktiv (und nicht mit dem Satz des Pythagoras)!

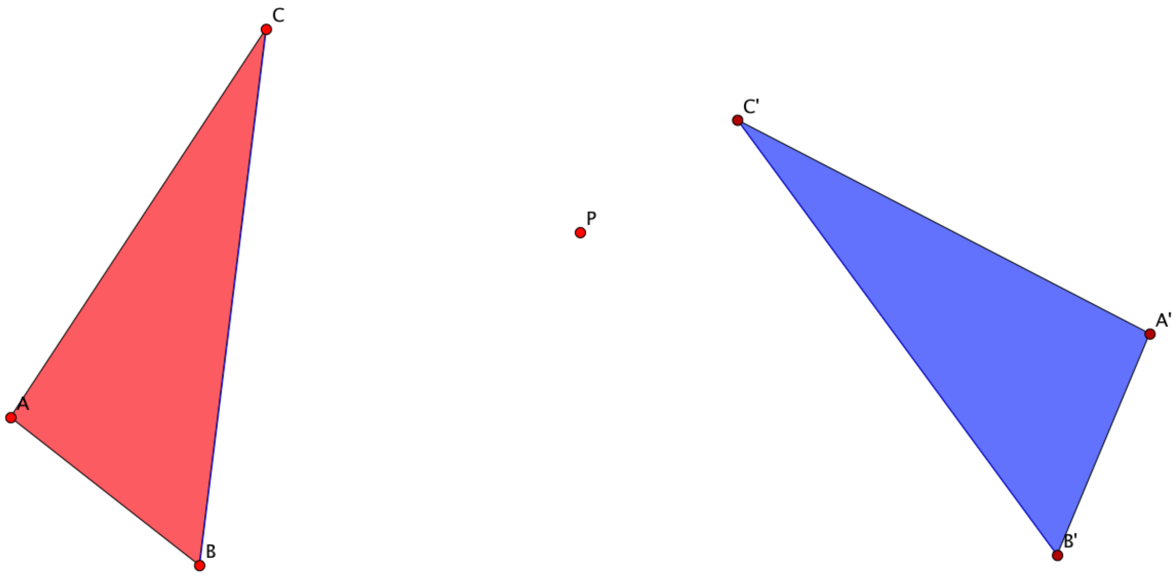
11. Von einer Geradenspiegelung kennt man die Achse a und ein zugeordnetes Punktepaar P und P'.

a) Man konstruiere zu einem gegebenen Punkt Q den Bildpunkt Q' allein unter Verwendung eines Lineals.

b) Wie gehen Sie vor, wenn Q im selben Abstand von a liegt wie P?

c) Wie gehen Sie vor, wenn Q auf der Geraden PP' liegt?

12. Durch die zwei kongruenten Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in der Ebene ist eine (bestimmte) Kongruenzabbildung festgelegt. Bilden Sie unter Zuhilfenahme dessen, was Sie über Kongruenzabbildungen wissen, den Punkt P unter der durch die beiden Dreiecke festgelegten Kongruenzabbildung ab.



13. Bestimmen Sie die Menge aller Kongruenzabbildungen, welche ...

a) den Fixpunkt *F*

b) die Fixgerade *f*

c) die Fixpunktgerade *g*

haben. Eine *Fixpunktgerade* ist eine Gerade, deren Punkte Fixpunkte sind, während eine *Fixgerade* nur als Punktmenge festbleibt.

uebung_abb_geo_03_1.docx: Verkettung von Achsenspiegelungen

1. Im Winkelfeld zweier sich schneidender Geraden a und b liegt ein Punkt C. Gesucht sind die Punkte A auf a und B auf b, so dass das Dreieck ABC den minimalen Umfang hat.

2. Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h. Hinweis: Verwenden Sie für die nachfolgenden Konstruktionen ein möglichst großes Blatt und zeichnen Sie großzügig!

a) Spiegeln Sie eine beliebige Figur zuerst an g und das entstehende Bild hernach an h. Diese Nacheinanderausführung zweier (verschiedener) Abbildungen nennt man eine *Verkettung*. (Erinnern Sie sich an die Kettenregel?). Wir notieren in diesem Rahmen diese Verkettung als $g \circ h$ (zuerst g, dann h). Die Buchstaben stehen dabei einmal für die Gerade, aber auch für die Spiegelung an dieser Geraden.

b) Vergleichen Sie Ihr Urbild und das zweite Bild. Durch welche (Ersatz-)Abbildung hätte man die Urbildfigur sofort in das zweite Bild abbilden können?

c) Wie hängt das bestimmende Element der Ersatzabbildung von der Lage der beiden Geraden g und h ab?

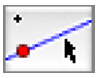
d) Zeichnen Sie zwei weitere Geraden g' und h', wobei alle vier Geraden zueinander parallel sein sollen und g' und h' denselben Abstand und dieselbe Orientierung zueinander haben sollen wie g und h. Bilden Sie dann Ihr Urbild zuerst an g' und das entstehende Bild dann an h' ab.

e) Bilden Sie Ihr Urbild zuerst an h und dann an g ab.

f) Bilden Sie Ihr Urbild zuerst an h' und dann an g' ab.

g) Was bedeuten die Ergebnisse aus e) und f) für die Verkettung von Funktionen?

3. Was ergibt die Verkettung zweier Achsenspiegelungen an derselben Achse?

4. Erzeugen Sie in Cinderella eine Gerade a durch einen Punkt P. 

a) Bilden Sie diese Gerade durch eine Verschiebung auf eine zweite Gerade b ab. Wie man Verschiebungen in Cinderella ausführt, erfahren Sie in der Datei *Cinderella-Anleitung* im allgemeinen Dateiordner von Moodle.

b) Spiegeln Sie ein beliebiges Dreieck an der ersten Geraden a.

c) Spiegeln Sie das erhaltene Bilddreieck an der zweiten Geraden b.

d) Fassen Sie die erste Gerade a am Punkt P und verschieben diese (mitsamt der Geraden b) parallel. Was passiert dabei mit den Dreiecken?

5. Führen Sie die Konstruktionen der vorhergehenden Aufgabe sinngemäß an zwei sich in einem Punkt P schneidenden Geraden g und h durch. Die Geraden g' und h' sollen sich im selben Punkt P schneiden und denselben Winkel bilden wie g und h.

6. Erzeugen Sie in Cinderella eine Gerade a durch einen Punkt P.

a) Bilden Sie diese Gerade durch eine Drehung um den Geradenpunkt P in Cinderella auf eine zweite Gerade b ab.

b) Spiegeln Sie ein beliebiges Dreieck an der ersten Geraden a.

c) Spiegeln Sie das erhaltene Bilddreieck an der zweiten Geraden b.

d) Drehen Sie die erste Gerade a (und damit auch die zweite Gerade b) um den Punkt P. Was passiert dabei mit den Dreiecken?

7. Führen Sie die Konstruktion ein weiteres Mal durch, dabei sollen a und b senkrecht aufeinander stehen. Erledigen Sie auch diese Konstruktion in Cinderella!

8. Eine Figur wird durch den Vektor $\vec{v}$ verschoben. Gegeben ist eine zum Vektor $\vec{v}$ senkrechte Gerade h. Wie muss man die Gerade j wählen, damit $j \circ h = \vec{v}$ gilt?

9. Bilden Sie ein beliebiges Dreieck durch eine Verschiebung ab. Wie viele Spiegelungen benötigen Sie, um das Urdreieck in das verschobene Bild abzubilden? Welche Lage müssen diese Achsen haben?

10. Gegeben ist eine Drehung $D(S, \varphi)$.

a) Ersetzen Sie diese Drehung durch ein Produkt $a \circ b$ von zwei Geradenspiegelungen. Bestimmen Sie passende Geraden a und b.

b) Gegeben ist eine Drehung $D(S, \varphi)$ und eine Gerade c durch S. Bestimmen Sie eine Gerade d so, dass die Drehung übereinstimmt mit dem Produkt $c \circ d$.

c) Gegeben ist eine Drehung $D(S, \varphi)$ und eine Gerade e durch S. Bestimmen Sie eine Gerade f so, dass die Drehung übereinstimmt mit dem Produkt $f \circ e$.

11. Gegeben sind zwei im Punkt T zueinander senkrechte Geraden p und q.

a) Spiegeln Sie einen Punkt Q zuerst an p nach S und danach S an q nach P.

b) Was für ein Dreieck PQS ergibt sich?

c) Welche Bedeutung hat der Punkt T in diesem Dreieck? Welcher bekannte Satz steckt hinter dieser Figur?

12. Gegeben ist der Ort eines Indianers I und sein Zelt Z auf verschiedenen Seiten des Flusses f (Gerade). Wie verläuft der kürzeste Weg von I nach Z, wenn der Indianer – um seine Spuren vor seinen Feinden zu verbergen – eine bestimmte, vorgegebene Watestrecke der Länge s im Fluss f zurücklegen will?

13. Gegeben sind zwei Orte A und B auf verschiedenen Seiten eines Kanals mit parallelen Ufern. Von A nach B soll auf dem kürzesten Weg eine Straße gebaut werden. Die dafür nötige Brücke über den Kanal muss diesen aber aus Kostengründen rechtwinklig schneiden! Lösen Sie diese Aufgabe (auch) durch Falten!

uebung_abb_geo_04_l.docx: Verkettung dreier Achsenspiegelungen

1. Was ergibt die Verkettung dreier Achsenspiegelungen an derselben Achse?

2. Gegeben sind drei zueinander parallele Geraden a, b, c. Bestimmen Sie Punkte A auf a, B auf b und C auf c so, dass das Dreieck ABC gleichseitig (bzw. rechtwinklig-gleichschenklig) ist. Hinweis: Legen Sie einen beliebigen Punkt B auf b fest. Wählen Sie einen beliebigen Punkt A auf a und konstruieren Sie den fehlenden Punkt C des gleichseitigen Dreiecks ABC (wobei C noch nicht auf c liegen muss)! Wiederholen Sie dies für andere Lagen von A. Was erkennen Sie? Begründen Sie daraus die eigentliche Konstruktion!

3. Gegeben ist ein Punkt P im Winkelfeld zweier Geraden a und b. Man bestimme Punkte A auf a und B auf b so, dass P Mitte der Strecke AB ist.
Hinweis: Gehen Sie ebenso vor, wie bei der vorhergehenden Aufgabe beschrieben und begründen Sie die eigentliche Konstruktion.

4. Beweisen Sie, dass das Produkt $a \circ b \circ c$ von drei Achsenspiegelungen an zueinander parallelen Achsen a, b und c wieder eine Achsenspiegelung d ist.

a) Wie kann man diese Achse d ermitteln? Zeichnen Sie ein Beispiel durch!

b) Was ist das Produkt von 4, 5, 6, 7, ... Geradenspiegelungen an parallelen Achsen?

5. Beweisen Sie, dass das Produkt $a \circ b \circ c$ von drei Achsenspiegelungen an *kopunktalen* (sich in einem Punkt schneidenden) Achsen a, b und c wieder eine Achsenspiegelung d ist.

a) Wie kann man die Achse d ermitteln? Zeichnen Sie ein Beispiel durch!

b) Was ist das Produkt von 4, 5, 6, 7, ... Geradenspiegelungen an kopunktalen Achsen?

6. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, drei Geraden in der Ebene anzuordnen?

a) Zählen Sie zunächst die beiden Sonderfälle auf!

b) Welche weiteren Lagen gibt es?

7. Untersuchen Sie nun, was sich bei einer Verkettung von drei Achsenspiegelungen ergibt. Hinweis: Gehen Sie grundsätzlich **nicht** so vor, dass Sie ein Dreieck oder eine andere geometrische Figur nacheinander an drei Achsen spiegeln! Verwenden Sie bei Ihren Überlegungen vielmehr die in der vorhergehenden Übung gemachten Erkenntnisse! Beachten Sie zudem, dass die Hintereinanderausführung von Abbildungen zwar assoziativ, aber in aller Regel nicht kommutativ ist!

a) Beginnen Sie mit den beiden oben gefundenen Sonderfällen und leiten Sie daraus eine (vorläufige) Regel ab.

b) Untersuchen Sie hernach den besonderen Fall, dass zwei Geraden parallel sind und die dritte Gerade auf den beiden anderen senkrecht steht. Wie kann man diese Abbildung deuten?

c) Zuletzt untersuchen Sie schließlich den allgemeinen Fall der Lage dreier Geraden in der Ebene.

d) Verallgemeinern Sie schließlich Ihre vorläufige Regel.

8. Noch etwas zum Knobeln: Zeichnen Sie auf ein Blatt zwei nicht parallele Geraden g und h, die sich zwar nahe, aber erst außerhalb der Blattränder in einem Punkt S schneiden. Zeichnen Sie außerdem einen Punkt P auf das Blatt.

Gesucht ist die Gerade durch P und S! Wie können Sie diese konstruieren? (Tricks, indem man bspw. das Blatt durch Ankleben eines zweiten Blatts vergrößert und dort den Schnittpunkt S bestimmt, sind nicht zugelassen!)

uebung_abb_geo_05_1.docx: Verkettung von vier Spiegelungen

1. Untersuchen Sie die Hintereinanderausführung verschiedener Abbildungen, indem Sie diese in Achsenspiegelungen zerlegen und dann geeignet manipulieren:

a) 2 Drehungen um verschiedene Drehpunkte und beliebige Winkel.

b) 2 Drehungen um verschiedene Drehpunkte mit dem ersten Drehwinkel $+\alpha$, der zweite Drehwinkel sei $-\alpha$.

c) 2 Punktspiegelungen um verschiedene Zentren.

d) 2 Verschiebungen um verschiedene Vektoren.

e) 1 Drehung und 1 Verschiebung.

f) 3 Punktspiegelungen um verschiedene Zentren.

2. Nennen und beweisen Sie den Reduktionssatz.

3. *S* ist ein Punkt auf der Geraden a. Was ergibt das Produkt aus der Punktspiegelung an *S* und der Geradenspiegelung an *a*? Vergleichen Sie $\dot{S} \circ \overline{a}$ mit $\overline{a} \circ \dot{S}$. Hinweis: Ersetzen Sie dazu jeweils die Punktspiegelung vorteilhaft durch ein Produkt zweier geeigneter Achsenspiegelungen.

4. Wie ändert sich der Umlaufsinn einer Figur, z.B. eines Dreiecks, wenn es einmal, zweimal, dreimal, ... *n*-mal gespiegelt wird?

a) Warum ist das Produkt von 3, 5, 7, 9, ... Geradenspiegelungen niemals eine Translation?

b) Warum ist das Produkt von 2, 4, 6, 8, ... Geradenspiegelungen niemals wieder eine solche?

5. Überlegen Sie grundsätzlich und allgemein: Welche Abbildung ergibt sich, wenn Sie eine Spiegelung mit einer Drehung verknüpfen? Was ergibt sich, wenn Sie eine Gleitspiegelung mit einer Verschiebung verknüpfen? Fassen Sie die Ergebnisse aller möglichen Kombinationen in einer Matrix zusammen:

∘	Spiegelung	Gleitspiegelung	Drehung	Verschiebung
Spiegelung				
Gleitspiegelung				
Drehung				
Verschiebung				

6. Gegeben ist ein Rechteck *ABCD*. Eine Figur F wird nacheinander an den Seitengeraden *AB* nach *F'*, *F'* dann an *BC* nach *F''*, *F''* dann an *CD* nach *F'''* und *F'''* schließlich an *DA* nach *F''''* gespiegelt. Welche Abbildung ergibt sich als Verkettung dieser vier Achsenspiegelungen?

7. Gegeben ist ein Parallelogramm *ABCD*. Eine Figur *F* wird nacheinander an der Seitengeraden *AB*, das Bild *F'* dann an *CD*, das Bild *F''* dann an *DA* und schließlich das Bild *F'''* dann an *BC* gespiegelt. Welche Abbildung führt die Figur *F* sofort in das endgültige Bild *F''''* über? Begründen Sie Ihre Antwort!

8. Gegeben ist ein Parallelogramm *ABCD*. Eine Figur *F* wird nacheinander an der Seitengeraden *AB*, das Bild *F'* dann an *BC*, das Bild *F''* dann an *DA* und schließlich das Bild

F''' dann an CD gespiegelt. Welche Abbildung führt die Figur F sofort in das endgültige Bild F'''' über? Begründen Sie Ihre Antwort!

9. Zeigen Sie durch Verwendung geeigneter Achsenspiegelungen: Das Produkt von zwei Punktspiegelungen ist stets eine Translation. Schubvektor ist der doppelte orientierte Abstand der beiden Drehpunkte. Es gilt also $\dot{P} \circ \dot{Q} = 2 \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

10. Beweisen Sie mit Hilfe einer geeigneten Zeichnung folgenden Sachverhalt: Das Produkt $\dot{P} \circ \overline{g}$ aus einer Punktspiegelung $\dot{P}$ und einer Achsenspiegelung $\overline{g}$ ist ...

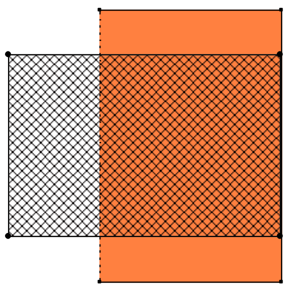
a) ... eine Achsenspiegelung genau dann, wenn *P* auf *g* liegt. Die Achse ist das Lot von *P* auf *g*.

b) ... eine Gleitspiegelung $\overline{c} \circ \vec{v}$ genau dann, wenn *P* nicht auf *g* liegt. „Gleitachse" ist das Lot *c* von *P* auf *g* und Schubvektor ist der doppelte orientierte Abstand von *P* zu *g*.

c) Untersuchen Sie ebenso das Produkt $\overline{g} \circ \dot{P}$ und formulieren Sie das Ergebnis wie oben.

11. Ein Blatt Papier liegt auf dem Tisch z.B. ein großes Zeitungspapier. Nun wird es beliebig um einen Punkt gedreht, dabei bleibt nur 1 Punkt, der Drehpunkt selbst, an seinem Ort. Danach wird das Blatt verschoben. Kann es einen Punkt auf dem Papier geben, der nun wieder genau an seinem ursprünglichen Platz liegt?

12. Durch Drehung der Tischplatte (braun) um 90° soll ein länglicher Tisch anders im Raum stehen können (grau). Ist dies durch eine einfache Drehung möglich? Wo muss der Drehzapfen angebracht werden?



13. Was ergibt die Verkettung zweier Gleitspiegelungen?

a) Verwenden Sie hierzu eine Darstellung der Form $\overline{a} \circ \dot{P}$ für die erste und $\dot{Q} \circ \overline{b}$ für die zweite Gleitspiegelung.

b) Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn die beiden Gleitachsen parallel zueinander sind?

Albrecht: Abbildungsgeometrie

Bachelor Mathematik Sek. I, M5

uebung_abb_geo_06_1.docx: Anwendungen zum Reduktionssatz

1. Beweisen Sie: Jeder Außenwinkel am Dreieck ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

2. Die Verkettung zweier Drehungen (im gleichen Drehsinn) um die Winkel α und β ist im Allgemeinen wieder eine Drehung um den Winkel (α + β).

a) Wie bestimmt man den neuen Drehpunkt?

b) Was ergibt sich, wenn die Summe α + β (ein Vielfaches von) 360° ist?

3. Die Verkettung einer Drehung um den Winkel α mit einer Verschiebung ergibt eine Drehung um den Winkel α. Wie bestimmt man das neue Drehzentrum?

4. Beweisen Sie den folgenden Satz: Sind a, b und c die Seitengeraden eines Dreiecks, so ist die Abbildung $\bar{a} \circ \bar{b} \circ \bar{c}$ eine Gleitspiegelung. Die Gleitachse verläuft durch die Höhenfußpunkte H_c und H_a.

5. Beweisen Sie jeweils an Hand einer entsprechenden Zeichnung:

a) Die Verkettung von drei Punktspiegelungen ist eine Punktspiegelung. Zentrum ist der die drei Punkte ergänzende vierte Parallelogrammpunkt.

b) Das Produkt einer ungeraden Anzahl von Punktspiegelungen ist eine Punktspiegelung, das einer geraden Anzahl von Punktspiegelungen eine Verschiebung.

c) Jede Verschiebung lässt sich ersetzen durch ein passendes Produkt aus zwei Punktspiegelungen. Man kann einen der beiden Punkte beliebig vorgeben.

d) Das Produkt einer Gleitspiegelung und einer Drehung ist eine Gleitspiegelung.

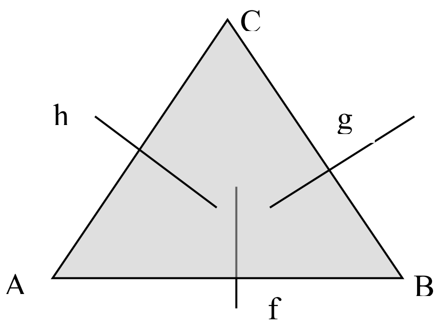
e) Das Produkt einer Gleitspiegelung und einer Verschiebung ist eine Gleitspiegelung.

6. Gegeben sind vier Punkte P, Q, R und S als Zentren von Punktspiegelungen. Ein beliebiger Punkt A soll nacheinander an P, Q, R und S gespiegelt werden. Gibt es eine Lage von A, so dass das resultierende Bild A'''' mit A zur Deckung kommt? Probieren Sie diese Aufgabenstellung in Cinderella aus!

7. Gegeben sind drei beliebige Geraden f, g und h. Diese sind die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks ABC. Gesucht ist das Dreieck ABC.

Hinweis: Man analysiere das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[rrr, bend right, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\bar{g}"] & C \arrow[r, "\bar{h}"] & A \end{tikzcd}$$



a) Was lässt die Analyse erkennen?

b) Was folgt daraus für den Typ der Abbildung α und für die Lage der drei Geraden f, g und h?

c) Welcher bekannte Satz über die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ist damit bewiesen?

d) Geben Sie Bedingungen für die Lösbarkeit der Aufgabe an.

e) Welche Lösungsgesamtheit ergibt sich im Falle der Lösbarkeit?

8. Von einem Dreieck (Viereck, Fünfeck, Sechseck, ...) sind die Mittelpunkte M_a, M_b, M_c, ... der aufeinanderfolgenden Seiten gegeben.

a) Wie lässt sich daraus das Dreieck konstruieren?

Hinweis: Analysieren Sie das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_a"] \arrow[rrr, bend right, "\alpha"'] & C \arrow[r, "M_b"] & A \arrow[r, "M_c"] & B \end{tikzcd}$$

b) Von welchem Typ ist die Abbildung α ? Was besagt dies über die Lage von B?

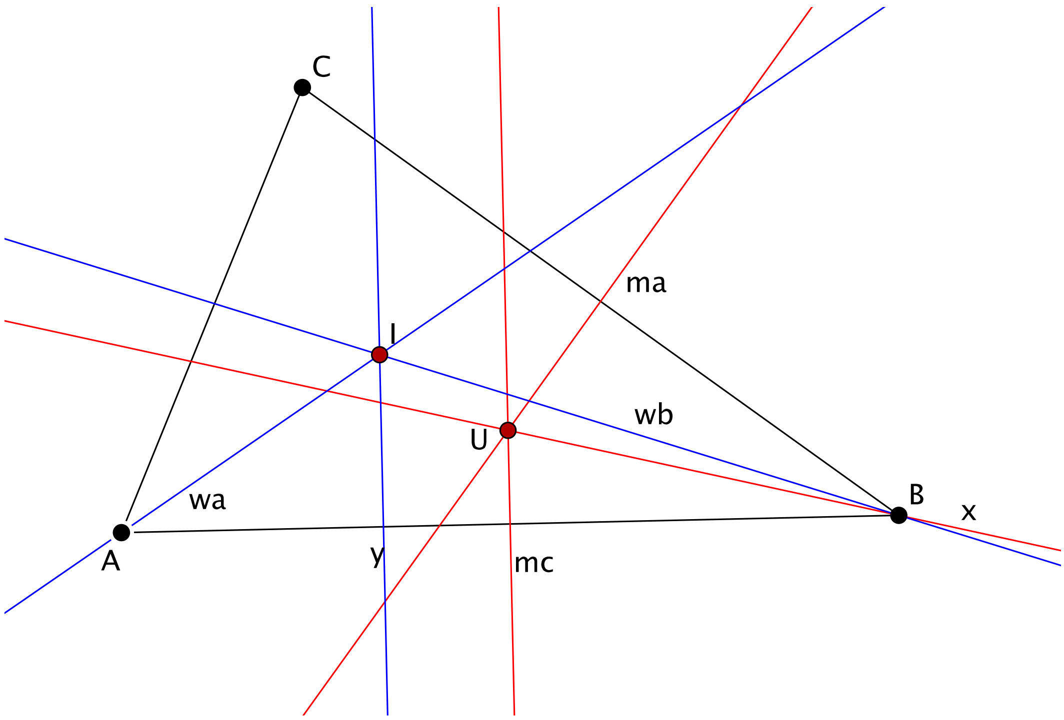
c) Überlegen Sie entsprechend für ein Viereck, Fünfeck, Sechseck, ... n-Eck!

9. Betrachten Sie die unten dargestellte Folge von Spiegelungen an den roten Achsen, wobei m_a und m_c die jeweiligen Mittelsenkrechten sind:

$$A \xrightarrow{m_c} B \xrightarrow{x} B \xrightarrow{m_a} C$$

bzw. an den blauen Achsen, wobei w_a und w_b die jeweiligen Winkelhalbierenden sind:

$$b \xrightarrow{w_a} c \xrightarrow{y} c \xrightarrow{w_b} a$$



a) Finden Sie jeweils die resultierende Abbildung.

b) Welche elementaren Sätze der Dreiecksgeometrie können Sie damit beweisen?

10. Das Ganze umgekehrt:

a) Gegeben sind drei kopunktale Geraden m_a, m_b und m_c, die Mittelsenkrechten eines Dreiecks. Können Sie das zugehörige Dreieck konstruieren? Wo muss der Punkt A liegen?

b) Gegeben sind drei kopunktale Geraden w_a, w_b und w_c, die Winkelhalbierenden eines Dreiecks. Können Sie das zugehörige Dreieck konstruieren? Wie muss die Seite a liegen?

uebung_abb_geo_07_1.docx: Rechnen in Gruppen

1. Wir betrachten die Menge $M = \{i, v, k, b\}$ der folgenden vier reellen Funktionen, also Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$i: x \to x$ (***Identität***) $\qquad v: x \to -x$ (***Vorzeichenwechsel***)

$k: x \to \frac{1}{x}$ (***Kehrwertbildung***) $\qquad b: x \to -\frac{1}{x}$ (***beides***).

a) Machen Sie sich die Wirkung der Funktionen auf einige reelle Werte an Beispielen klar, indem Sie die Funktionswerte für folgende x berechnen: 1; -1; 2; -2; 3/5; – 4,5;

b) Stellen Sie eine Wertetabelle (Paarmenge) auf für die vier Funktionen und berechnen Sie die Funktionswerte:

x	1	-1	2	-2	3/5	-4,5	…
$i(x)$							
$v(x)$							
$k(x)$							
$b(x)$							

c) Nun wollen wir nicht mehr mit einzelnen Argument- und Funktionswerten, sondern mit den Funktionen selbst als Ganzen operieren, indem wir diese verketten.

Beispiel:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "v"'] & y \arrow[r, "b"] & z \end{tikzcd}$$

Berechnet man für einige Werte diese Verkettung der Abbildungen k und b, so entdeckt man, dass die Verkettung der Funktion k (zuerst) mit der Funktion b (danach) als Ergebnis genau dieselbe Wirkung hat, wie die Funktion v. Dies kann man allgemein zeigen:

Es gilt: $b(k(x)) = b\left(\frac{1}{x}\right) = -x = v(x)$ für beliebiges x.

Wir schreiben dafür $v = k \circ b$ und lesen dies als:

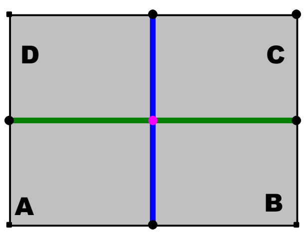
„v gleich k verkettet mit b“ oder *„v ist die Verkettung von k mit b“*

Stellen Sie alle Möglichkeiten dar und listen Sie diese in einer Verknüpfungstabelle auf

∘	i	v	k	b
i				
v				
k				v
b				

2. Wir betrachten ein echtes, also nicht quadratisches Rechteck mit seinen sämtlichen Deckabbildungen (Symmetrien).

a) Schneiden Sie sich ein Exemplar aus Pappe aus und beschriften Sie seine Ecken auf der Vorder- und Rückseite wie im Bild gezeigt.



b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das Pappexemplar „passend" (kongruent) auf das Ausgangsexemplar in dieser Zeichnung zu legen?

c) Wie muss man das Pappexemplar jeweils bewegen, d.h. welche Abbildung wird dabei durchgeführt? Probieren Sie dies aus. Ein Beispiel ist hier angegeben:

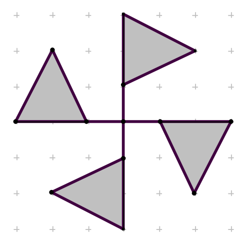
$$H = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{bmatrix}.$$

H ist eine Halbdrehung (Punktspiegelung) um den Mittelpunkt.
Schreiben Sie alle Deckabbildungen in dieser Matrixschreibweise auf!

d) Man erhält eine Menge $M = \{I, S, W, H\}$ von vier verschiedenen Abbildungen. Operieren Sie nun mit diesen vier Abbildungen wie im Beispiel 1 und stellen Sie ebenfalls eine Verknüpfungstafel für die Verkettung der vier Deckabbildungen des Rechtecks auf. (Ermitteln Sie die Verknüpfungen durch Verfolgen von Punkten in den Permutationsmatritzen!) Was entdecken Sie?

e) Vergleichen Sie mit Aufgabe 1.

3. Welche Deckabbildungen (Symmetrien) lässt das nebenstehend abgebildete Windrad zu?



a) Notieren Sie sämtliche Möglichkeiten. Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für die Verkettung all dieser Abbildungen auf.

b) Was entdecken Sie? Vergleichen Sie mit den Aufgaben 1 und 2. Was ist gleich, was ist anders?

c) Woher kennen Sie diese Struktur?

4. Stellen Sie die Gruppentafel der Restklassengruppe mod 6 bezüglich der Restklassenaddition $\oplus$ auf. $R_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

a) Bestimmen Sie die sämtlichen Deckdrehungen d, d^2, d^3, ... $d^6 = i$ eines regelmäßigen Sechsecks.

b) Stellen Sie die Gruppentafel für die Verkettung dieser Deckdrehungen auf.

c) Vergleichen Sie die beiden Gruppentafeln.

d) Zeichnen Sie einen Gruppengraphen für die beiden Gruppen. Warum heißen diese Gruppen „zyklisch"?

e) Welche Deckdrehungen sind zueinander invers?

5. Definieren Sie den Begriff der Gruppe anhand der vorhergehenden Aufgabenstellungen.

6. Beweisen Sie die nachstehenden Gruppensätze:

a) Jede lineare Gleichung der Form $a \mathbin{\&} x = b$ bzw. der Form $y \mathbin{\&} c = d$ besitzt in einer Gruppe stets genau eine eindeutig bestimmte Lösung x bzw. y. Man sagt, die Gruppe sei dividierbar (Existenz) und regulär (Eindeutigkeit).

b) Es gelten die folgenden Kürzungsregeln (Regularität):
Aus $a \mathbin{\&} x = a \mathbin{\&} y$ folgt $x = y$ und aus $x \mathbin{\&} a = y \mathbin{\&} a$ folgt ebenfalls stets $x = y$.

c) In jeder Zeile und in jeder Spalte der Verknüpfungstafel einer Gruppe kommt jedes Element genau einmal vor.

d) Das Neutralelement einer Gruppe ist eindeutig.

e) Das zu jedem Gruppenelement existierende Inverse ist stets eindeutig.

f) In Gruppen gilt stets die folgende *Inversenregel*: $(a \mathbin{\&} b)^{-1} = b^{-1} \mathbin{\&} a^{-1}$

7. Beweisen Sie: Sind alle Elemente einer Gruppe selbstinvers, so ist die Gruppe kommutativ. Drücken Sie dafür $(a \ \& \ b)^{-1}$ auf zwei verschiedene Weisen aus. (Hinweis: Einmal die Inversenregel verwenden!)

8. Bestimmen Sie die sämtlichen Deckabbildungen D_3 eines gleichseitigen Dreiecks, eines Quadrats (D_4), eines regelmäßigen Fünfecks (D_5) und eines regelmäßigen Sechsecks (D_6).

a) Stellen Sie Verknüpfungstafeln für diese Deckabbildungsgruppen D_n auf.

b) Was ergibt die Verkettung zweier Drehungen, zweier Spiegelungen, einer Drehung mit einer Spiegelung?

c) Wie viele Drehungen und wie viele Spiegelungen gibt es in der Gruppe D_n?

d) Wie viele Elemente der D_n sind selbstinvers? Was können Sie über n aussagen, wenn eine selbstinverse (echte) Deckdrehung existiert?

9. Wir betrachten die Diedergruppe D_{10}, also Deckabbildungen des regelmäßigen 10-Ecks:

a) Was ergibt das Produkt $(\overline{s}d^3)\circ(sd^5)$?

b) Berechnen Sie $d^7 \circ sd^8$ auf zwei verschiedene Möglichkeiten.

10. Bestimmen Sie die sämtlichen *Deckabbildungen eines echten Quaders*.

a) Notieren Sie die einzelnen Abbildungen als Permutationsmatritzen.

b) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für diese Symmetriegruppe eines Quaders mit der Verkettung als Verknüpfung auf.

11. Bestimmen Sie sämtliche Teilmengen einer Menge M mit $n = 3$ Elementen, also P_3.

a) Erstellen Sie eine Tafel für die Verknüpfung *symmetrische Differenz* Δ. Die symmetrische Differenz nennt man auch die „Entweder-Oder-Menge“: $A\Delta B$ enthält alle Elemente, die entweder in A oder in B enthalten sind (aber nicht in beiden Mengen)! Dies kommt auch durch die Definition $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$ zum Ausdruck.

b) Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Symmetriegruppe des Quaders.

12. Basteln Sie sich aus dünnem Karton einen Tetraeder, Kantenlänge mindestens 10 cm.

a) Deckabbildungen von ebenen Figuren und Körpern kann man durch Permutationsmatritzen notieren. Wie viele Deckabbildungen eines Tetraeders im Raum muss es demnach geben? Diese Permutationen selbst können Sie sich schnell in Maxima mit der Funktion `permutations([A,B,C,D])` erstellen lassen. Zuvor muss diese Funktion mittels `load(functs)` geladen werden.

b) Durch welche Deckdrehungen im Raum kann der Tetraeder auf sich selbst abgebildet werden? Notieren Sie diese Deckdrehungen in Permutationsschreibweise!

c) Weitere sechs Deckabbildungen des Tetraeders im Raum sollten Sie unschwer finden können (Spiegelungen an einer Ebene im Raum)! Notieren Sie diese Deckabbildungen ebenfalls in Permutationsschreibweise!

d) Anhand Ihrer Lösung in a) wissen Sie, wie viele weitere Deckabbildungen es geben muss. Um diese zu finden, verknüpfen Sie die in c) gefundenen Abbildungen mit den in b) gefundenen Drehungen so lange, bis Sie eine neue Permutation finden. Um was für eine Abbildung handelt es sich dabei? Wie viele dieser Abbildungen gibt es am Tetraeder?

$$? = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{bmatrix}$$

e) Fleißaufgabe: Stellen Sie eine Verknüpfungstafel der Deckdrehungen des Tetraeders auf.

Gruppentafel der Tetraedergruppe (zum Ausfüllen):

$\circ$	**i**	**r**	**s**	**t**	α	β	γ	δ	α^2	β^2	γ^2	δ^2
i												
r												
s												
t												
α												
β												
γ												
δ												
α^2												
β^2												
γ^2												
δ^2												

13. Backen Sie einen rechteckigen Kuchen und platzieren Sie auf diesem Kuchen beliebig eine ebenfalls rechteckige Tafel Schokolade. Wie können Sie die Torte und die Schokolade mit einem geraden Messerschnitt so teilen, dass beide Rechtecke halbiert werden? Bringen Sie als Lösungsnachweis mindestens eine Kuchenhälfte mit!

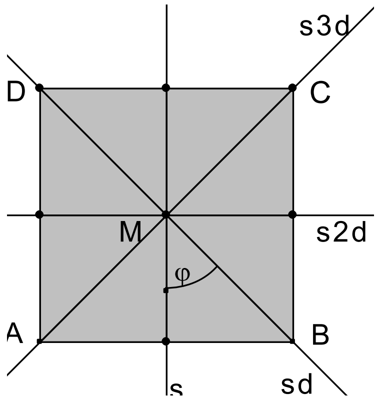
uebung_abb_geo_08_1.docx: Symmetrien und Verhältnisse

1. Wann ist eine Figur symmetrisch?

a) Welche Arten von Symmetrien kann es geben?

b) Kann es verschiebungssymmetrische Figuren geben? Gibt es solche mit Gleitspiegelsymmetrie?

2. Ein regelmäßiges Viereck (Quadrat) lässt die folgenden Deckabbildungen (Symmetrien) zu:



Die **vier Deckdrehungen** um Vielfache des Winkels 360°/4 (einschl. Identität) und

die **vier Spiegelungen** an den Mittellinien und den Diagonalen.

Die Deckdrehungen bilden bereits für sich eine zyklische Gruppe.

Die Drehungen sind in der Abbildung aus drucktechnischen Gründen in additiver Schreibweise verknüpft: $d \circ d = 2d$ an Stelle von d^2 in multiplikativer Schreibweise.

Die Drehung d um 90° lässt sich darstellen als Produkt von zwei Spiegelungen an den Achsen s und sd. Multipliziert man diese, so erhält man $\overline{s} \circ \overline{sd} = (\overline{s} \circ \overline{s}) \circ d = d$ und daher ist diese Bezeichnung sinnvoll. Analoges gilt für die anderen Spiegelachsen.

Ebenso lässt sich die Spiegelung an der Achse sd darstellen als Verknüpfung der Spiegelung an s mit der Drehung d, die Spiegelung $s2d$ als Spiegelung an s verknüpft mit $2d$ u.s.w.

a) Warum bilden die Spiegelungen im Gegensatz zu den Drehungen keine eigene Gruppe?

b) Füllen Sie mit Hilfe der Beziehung $s \circ k \cdot d = (n-k) \cdot d \circ s$ die folgende Verknüpfungstafel aus!

$\circ$	i	d	$2d$	$3d$	s	sd	$s2d$	$s3d$
i								
d								
$2d$								
$3d$								
s								
sd								
$s2d$								
$s3d$								

c) Ermitteln Sie **alle** Untergruppen, auch die sog. trivialen Untergruppen – Sie müssten 10 Stück finden! Hilfreich mag der Satz sein, wonach die Ordnung einer Untergruppe immer Teiler der Ordnung der (Ober)-Gruppe sein muss; Sie müssen somit z.B. nicht nach Untergruppen der Ordnung 3 suchen. Notieren Sie die Elemente der gefundenen Untergruppen in Mengenschreibweise.

d) Stellen Sie ein Hassediagramm **sämtlicher** Untergruppen der D_4 dar. Beginnen Sie die Darstellung oben mit der Menge aller Elemente. Ein nach unten gehender Strich entspricht der Relation ... ist Obermenge von ... bzw. von unten nach oben gelesen: ... ist Untermenge von ...

e) Jede notierte Menge steht für ein Viereck mit den jeweiligen Symmetrien. So steht beispielsweise die Menge $\{i, d, 2d, 3d, s, sd, s2d, s3d\}$ für ein Quadrat, da nur dieses als Viereck die angegebenen Symmetrien besitzt. Mengen mit weniger Elementen stehen daher für Vierecke mit weniger Symmetrien! Notieren Sie zu den Mengen in Ihrem Hasse-Diagramm die zugehörigen Vierecke. Was erhalten Sie?

f) Wo befindet sich die zyklische Drehgruppe in Ihrem Diagramm – bzw. für welches Viereck steht diese?

g) Warum sind zwei symmetrische Vierecke durch jeweils zwei zugehörige Untergruppen repräsentiert?

h) Kann es weitere Vierecke mit Symmetrie geben?

3. Die Kongruenzgruppe der Ebene enthält als Elemente alle möglichen Kongruenzabbildungen der Ebene. Dies sind unendlich viele, die Kongruenzgruppe der Ebene ist daher eine unendliche Gruppe. Diese unendliche Kongruenzgruppe der Ebene hat Untergruppen von ebenfalls unendlicher Ordnung – die uns aber an dieser Stelle nicht interessieren. Uns interessiert vielmehr die Frage, ob es auch **endliche Untergruppen der vollen Kongruenzgruppe** geben kann und – falls ja – welche dies sind.

a) Warum kann eine endliche Untergruppe keine echte Translation enthalten?

b) Warum kann eine endliche Untergruppe keine echte Gleitspiegelung enthalten?

c) Warum kann eine endliche Untergruppe keine zwei Drehungen mit verschiedenen Drehpunkten enthalten?

d) Welche Voraussetzung muss gelten, wenn in einer endlichen Untergruppe eine Drehung um einen Punkt D und eine Spiegelung an einer Geraden g enthalten sein soll?

e) Welche Möglichkeiten für endliche Untergruppen bleiben?

f) Um welche Gruppen handelt es sich somit bei endlichen Untergruppen der Kongruenzgruppe der Ebene?

4. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h und ein Punkt P auf g. Konstruieren Sie den Punkt Q ebenfalls auf g, dessen Abstand von h gleich seiner Entfernung zu P ist.

5. Zwei Geraden g und h schneiden sich im Punkt A. In einem Winkelfeld der beiden Geraden liegen die Punkte P und R. Konstruieren Sie ein Parallelogramm $PQRS$, wobei Q auf g und S auf h liegt.

6. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 sowie eine Gerade g.

a) Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$, wobei A auf k_1, C auf k_2 und B und D auf g liegen sollen.

b) Bei welcher Lage der Kreise gibt es keine, genau eine, genau zwei, unendlich viele Lösungen?

7. Konstruieren Sie zwei Dreiecke: Dreieck 1 hat die Seitenlängen $a = 8$, $b = 6$ und $c = 10$. Das zweite Dreieck sei rechtwinklig mit einer Hypotenusenlänge von 5 und der Länge von $b = 3$. Berechnen Sie die Streckenverhältnisse b/a, b/c und a/c in beiden Dreiecken. Was stellen Sie fest?

8. Konstruieren Sie rechtwinklige Dreiecke, in welchen die Verhältnisse zweier Seiten

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

betragen. Um was für Dreiecke handelt es sich?

9. Zeichnen Sie eine beliebige Strecke AB.

a) Konstruieren Sie geometrisch auf AB den Teilpunkt T mit dem Teilverhältnis $\lambda_{AB} = \frac{5}{3}$

b) In welchem Verhältnis teilt T die Strecke BA?

c) Konstruieren Sie einen Teilpunkt S, der AB im Verhältnis 2 teilt. In welchem Verhältnis teilt S die Strecke BA?

d) Nun allgemein: Ein Punkt T teile eine Strecke AB im Verhältnis λ. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke BA?

10. Nun zur äußeren Teilung. Überlegen Sie gedanklich, mit Hilfe von Skizzen oder am besten anhand eines dynamischen Geometriesystems, was mit dem Teilverhältnis λ_{AB} passiert, wenn Sie den Teilungspunkt T zwischen A und B immer näher an B heranschieben.

a) Welches Teilverhältnis erhalten Sie, wenn T genau auf B zu liegen kommt? Machen Sie ggf. eine Grenzwertbetrachtung!

b) Welche Teilverhältnisse erhalten Sie, wenn Sie T über B hinaus immer weiterschieben? Schieben Sie dabei in Gedanken bis ins Unendliche weiter.

c) Nun in die andere Richtung: Schieben Sie T innerhalb von AB immer näher an A heran. Wie ändert sich das Teilverhältnis?

d) Welches Teilverhältnis ergibt sich, wenn T auf A zu liegen kommt? Ist wieder eine Grenzbetrachtung nötig?

e) Schieben Sie weiter über A hinaus bis ins Unendliche. Welche Werte nehmen die zugehörigen Teilverhältnisse an? Welchen Grenzwert erhalten Sie für das Teilverhältnis im Unendlichen?

f) Legen Sie die zu teilende Strecke AB auf die x-Achse eines Koordinatensystems: A in den Ursprung und B irgendwo weiter rechts auf den positiven Teil der x-Achse. Tragen Sie dann für jeden Punkt der x-Achse das Teilverhältnis, mit welchem dieser Punkt die Strecke AB teilt als Funktionswert y über dem jeweiligen Teilpunkt auf. Skizzieren Sie schließlich den Graphen aller Teilverhältnisse über AB.

11. Ein Punkt T teile die Strecke AB außen im Verhältnis $\lambda_{AB} = -\frac{9}{4}$.

a) Konstruieren Sie diesen äußeren Teilpunkt einer beliebigen Strecke AB geometrisch.

b) Der Punkt S teile AB außen im Verhältnis $\lambda_{AB} = -\frac{3}{4}$. Konstruieren Sie auch diesen Teilpunkt geometrisch.

12. Gegeben ist die folgende Lage der vier Punkte A, B, C und D auf einer Geraden. Geben Sie die jeweiligen Doppelverhältnisse an.

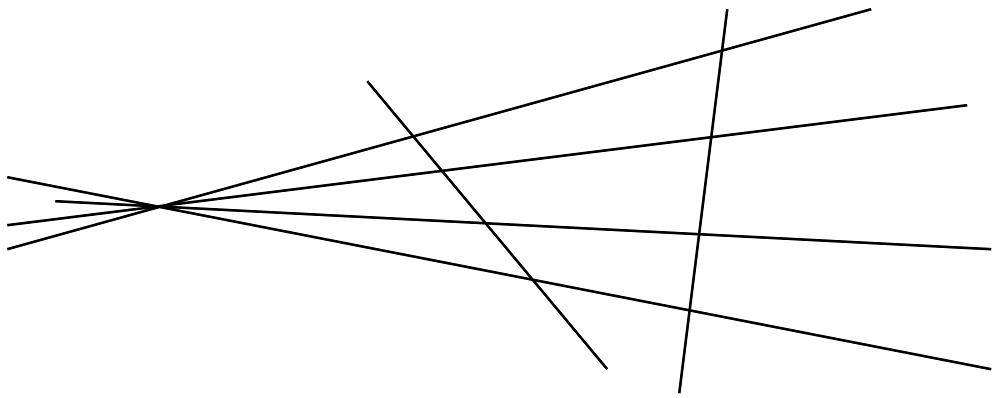
a) $(ABDC)$

b) $(BACD)$
c) $(ACBD)$
d) $(ADBC)$

13. Untersuchen Sie, was passiert, wenn man ...

a) ... die zugrundeliegende Strecke mit der durch die Teilpunkte gebildete Strecke vertauscht, also aus $(ABCD)$ nun $(CDAB)$ wird.
b) ... die Endpunkte der Ausgangsstrecke vertauscht, also aus $(ABCD)$ nun $(BACD)$ wird.
c) ... die Teilpunkte vertauscht, also aus $(ABCD)$ nun $(ABDC)$ wird.
d) ... den Endpunkt der Strecke mit dem ersten Teilpunkt vertauscht, also aus $(ABCD)$ nun $(ACBD)$ wird.
e) ... den Anfangspunkt der Strecke mit dem zweiten Teilpunkt vertauscht, also aus $(ABCD)$ nun $(DBCA)$ wird.

14. Zwei nicht zueinander parallele Geraden g und h werden von vier kopunktalen Strahlen in den Punkten A, B, C und D (auf g) bzw. A', B', C' und D' (auf h) geschnitten. Zeichnen Sie, messen Sie und berechnen Sie die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$.



uebung_abb_geo_09_l.docx: Dilatationen

1. Was ist eine *Kollineation*? Nennen Sie Beispiele!

2. Grenzen Sie den Begriff *Dilatation* von der Eigenschaft *parallelentreu* ab!

3. Beweisen Sie: Bei jeder Dilatation ist die Spurgeradegerade g vom Urbild P zum Bild P' eine Fixgerade.

4. Begründen Sie: Wenn eine Dilatation einen Fixpunkt hat, dann ist jede durch diesen Fixpunkt verlaufende Gerade eine Fixgerade!

5. Welche der folgenden Abbildungen sind parallelentreu, welche sind Dilatationen?

a) Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Translation, Gleitspiegelung, Drehung um 90°, Schrägspiegelung

b) Wie hängen Parallelentreue und die Dilatationseigenschaft logisch zusammen?

6. Ist es fachlich korrekt, beim Drehpunkt einer Drehung von einem *Zentrum* (Drehzentrum) zu sprechen? Welche Ihnen bekannten Abbildungen haben ein Zentrum?

7. Wieso kann eine Dilatation mit Fixpunkt höchstens einen Fixpunkt haben?

8. Gegeben ist eine Dilatation mit ihrem Fixpunkt F. Gegeben sind außerdem ein Punkt P, dessen Bild P' und ein Punkt Q. Konstruieren Sie aus den bisher bekannten Eigenschaften einer Dilatation mit Fixpunkt den Bildpunkt Q'.

9. Gegeben ist eine Dilatation ohne Fixpunkt. Gegeben sind außerdem ein Punkt P, dessen Bild P' und ein Punkt Q. Konstruieren Sie aus den bisher bekannten Eigenschaften einer Dilatation ohne Fixpunkt den Bildpunkt Q'.

10. Warum bildet die Verkettung von Dilatationen eine Gruppe?

11. Führen Sie eine zentrische Streckung durch, indem Sie ein beliebiges Dreieck an einem frei wählbaren, außerhalb des Dreiecks liegenden Zentrum abbilden. Tun Sie dies mit den Streckfaktoren k_1: 3, k_2: 1/2 und k_3: –2.

12. Führen Sie die Streckung eines beliebigen Dreiecks an einem beliebigen Zentrum Z mit dem Streckfaktor $\frac{5}{7}$ konstruktiv durch. Dies bedeutet, dass Sie die Bildpunkte nicht durch Rechnen und Messen, sondern rein konstruktiv mit Zirkel und Lineal finden sollen!

a) Gilt Ihre gefundene Lösung auch für den Streckfaktor $\frac{7}{5}$?

b) Verallgemeinern Sie Ihre Lösung.

13. Weisen Sie an einem Beispiel nach, dass die Verkettung von zentrischen Streckungen keine Gruppe bildet!

14. Beweisen Sie auf mindestens zwei verschiedenen Weisen: Die Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

15. Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck *ABC* und konstruieren Sie in dieses Dreieck ein Quadrat *PQRS*, so dass *P* und *Q* auf *AB* liegen und *R* auf *BC* sowie *S* auf *AC* zu liegen kommen.

16. Zwei Kreise sind stets zueinander zentrisch ähnlich. Ein Zentrum, von dem aus der eine Kreis auf den anderen gestreckt werden kann, heißt *Ähnlichkeitspunkt* der beiden Kreise.

a) Zeichnen Sie zwei beliebige, nicht konzentrische Kreise.

b) Wie viele Ähnlichkeitspunkte haben diese Kreise?

c) Wo muss dieser Ähnlichkeitspunkt bzw. wo müssen diese Ähnlichkeitspunkte liegen?

d) Konstruieren Sie diese(n) Ähnlichkeitspunkt(e) und geben Sie den Konstruktionstext an.

e) Geben Sie eine Begründung für Ihre Lösung an.

17. Zeichnen Sie zwei von einem Punkt A ausgehende Strahlen und in das durch die Strahlen gebildete Winkelfeld einen Punkt *P*.

a) Konstruieren(!) Sie dann den/die Kreis(e), welche die Strahlen tangieren und durch den Punkt P verlaufen.

b) Beschreiben und **begründen** Sie Ihr Vorgehen!

18. Sie strahlen mit Ihrer Taschenlampe eine Fläche (z.B. Hauswand) an. Dann verringern Sie den Abstand zur Wand auf die Hälfte. Um welchen Faktor steigt die Strahlungsintensität auf der Hauswand an? Ernst gemeinter Tipp: Ausprobieren!

19. Gegeben sei ein ideal kegelförmiges Sektglas, in welchem Sekt mit Orangensaft eingefüllt wird.

a) Sie schenken zuerst Sekt bis genau zur halben Höhe des Glases ein, danach füllen Sie das Glas vollends mit Orangensaft auf. Welches Verhältnis Sekt zu Orangensaft haben Sie dann im Glas?

b) Bis zu welcher Höhe müssen Sie Sekt einfüllen und dann mit Orangensaft auffüllen, damit Sie ein Verhältnis von 1:1 erhalten?

Auch diese Problemstellung können Sie – mit einem möglichst ideal kegelförmigen Sektglas – in der Praxis erproben!

uebung_abb_geo_10_1.docx: Ähnlichkeiten berechnen

1. Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem das Dreieck A:[4, 1], B:[5, 3], C:[1, 2]. Verwenden Sie als Einheit auf jeder Achse 0,5 cm, also eine Karobreite.

a) Verwenden Sie dann als neue Einheit auf beiden Achsen 2 cm, also vier Karobreiten. Tragen Sie die obigen Punkte in dieses Koordinatensystem mit den größeren Einheiten ein.

b) Vergleichen Sie das Ausgangsdreieck mit diesem Dreieck. Welche Beziehung besteht zwischen beiden Dreiecken? Mit welcher konkreten Abbildung wurde das zweite aus dem ersten Dreieck erzeugt?

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des zweiten Dreiecks im ersten Koordinatensystem mit der Einheit 0,5 cm.

d) Wie können Sie diese Koordinaten direkt berechnen? Überprüfen Sie Ihre Vermutung und versuchen Sie, eine Regel zu formulieren!

e) Die Einheit auf den Koordinatenachsen wird auf 1 cm (zwei Karobreiten) gesetzt – aber nun in der Richtung getauscht: Die x-Achse bekommt somit vom Ursprung aus nach links positive und nach rechts negative Werte. Die y-Achse ist oben negativ und unten positiv. Tragen Sie das Dreieck mit den obigen Koordinaten in dieses System ein und lesen Sie dessen Koordinaten im ursprünglichen System ab.

f) Mit welcher Regel hätten Sie diese Koordinaten berechnen können?

g) Welche konkrete Abbildung wurde jetzt durchgeführt?

h) Wir belassen die Einheit auf 1 cm und die x-Achse von rechts (negativ) nach links (positiv) laufend. Die y-Achse nehmen wir jedoch wieder in ihre ursprüngliche Orientierung (unten negativ, oben positiv) zurück. Tragen Sie die Dreieckspunkte nun in dieses System ein und lesen Sie die Koordinaten im Ursprungssystem ab. Was für eine Abbildung haben Sie erhalten?

i) Wir belassen die Einheit weiterhin auf 1 cm, tauschen aber jetzt die Orientierung auf beiden Achsen: Die x-Achse bekommt wieder ihre ursprüngliche Orientierung (links $\rightarrow$ rechts: negativ $\rightarrow$ positiv). Die y-Achse sei nun oben negativ und unten positiv. Wieder tragen Sie die Dreieckspunkte in dieses System ein und lesen deren Koordinaten im Ursprungssystem ab. Um was für eine Abbildung handelt es sich?

j) Überprüfen Sie, ob Ihre in d) gefundene Regel auch die beiden zuletzt diskutierten Beispiele abdeckt!

k) In welcher Beziehung stehen die Dreiecke aus den Aufgabenteilen h) und i) zueinander?

2. Rekapitulieren Sie die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor (sog. Matrix-Vektor-Produkt aus der linearen Algebra). Was ergibt beispielsweise

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 9 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = ?$$

Wie muss gerechnet werden? Welche Regeln gibt es bei einer solchen Multiplikation zu beachten?

3. Am besten fertigen Sie eine neue Zeichnung entsprechend Aufgabe 1 und tragen dort wieder die Punkte A, B und C ein.

a) Markieren Sie in diesem Koordinatensystem die Punkte E_1:[2, 1] und E_2:[–1, 2].

b) Legen Sie eine Gerade durch den Ursprung Ihres Koordinatensystems und E_1 sowie eine Gerade durch den Ursprung und E_2. Diese beiden Geraden sind die Achsen eines weiteren (etwas gedrehten) Koordinatensystems. Die Einheiten dieses Systems sind durch die Punkte E_1 bzw. E_2 gegeben. Zeichnen Sie in dieses Koordinatensystem die Punkte A, B und C ein. Welche Koordinaten haben diese Punkte im ursprünglichen System? Welche Abbildung wurde durchgeführt?

c) Wie können Sie die Koordinaten – ausgehend von den Koordinaten der Punkte E_1 und E_2 – durch Rechnen erhalten? Überprüfen Sie Ihre Vermutung anhand weiterer, selbst gewählter Punkte, deren Koordinaten Sie einmal in das Ursprungssystem und ein zweites Mal in das gedrehte System eintragen!

d) Sehen Sie einen Zusammenhang zwischen Ihrer gefundenen Berechnungsvorschrift und der oben diskutierten Matrix-Vektor-Multiplikation?

4. Tragen Sie in das Ursprungskoordinatensystem die Punkte U:[3, 5], E'_1:[5, 6] und E'_2:[2, 7] ein. Die Koordinatenachsen verlaufen jetzt durch UE'_1 und UE'_2.

a) Tragen Sie die Punkte A, B und C in dieses System ein und bestimmen Sie deren Koordinaten im Ursprungssystem.

b) Welche Abbildung haben Sie durchgeführt?

c) Wie können Sie die Koordinaten der Bildpunkte im Ursprungssystem berechnen?

d) Versuchen Sie eine Rechenregel mit Hilfe von Matrizen und Vektoren aufzustellen!

5. Sie sollen nun Ihre in den vorausgehenden Aufgaben gewonnenen Erkenntnisse zusammenzufassen und weiter vertiefen!

a) Zur Schärfung Ihrer Zusammenfassung zeichnen Sie das Dreieck ABC nochmals in das Ursprungs-Koordinatensystem. Dann markieren Sie auf der x-Achse die Einheiten im Abstand von 4 Karobreiten (2 cm) und auf der y-Achse im Abstand von 2 Karobreiten (1 cm). Tragen Sie in dieses System die Punkte A, B und C ein. Vergleichen Sie Urbild- und Bilddreieck. Sind diese ähnlich?

b) Gegeben sei die Abbildungsmatrix $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Bilden Sie mittels dieser Matrix die eingangs gegebenen Punkte A:[4, 1], B:[5, 3], C:[1, 2] rechnerisch ab. Welche Werte erhalten Sie für A', B' und C'?

c) Zeichnen Sie die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ anhand der gegebenen bzw. errechneten Koordinaten in ein Koordinatensystem. Sind beide Dreiecke zueinander ähnlich?

d) Zeichnen Sie noch das durch die gegebene Abbildungsmatrix zugehörige Koordinatensystem ein.

e) Offensichtlich erzeugt nicht jede beliebige Abbildungsmatrix und jedes mit der Matrix verbundene Koordinatensystem eine Ähnlichkeitsabbildung. Zählen Sie zunächst die Bedingungen auf, die für ein (zweites) Koordinatensystem gegeben sein müssen, damit dieses eine Ähnlichkeitsabbildung erzeugt.

f) Was bedeutet dies für die sogenannte Abbildungsmatrix?

g) Wie lautet die Abbildungsmatrix einer zentrischen Streckung aus dem Ursprung mit dem Streckfaktor $k = 3$?

h) Wie lautet die Abbildungsmatrix einer zentrischen Streckung aus dem Punkt P:(5, 2) mit dem Streckfaktor $k = 3$?

6. Welche Abbildung erhalten Sie mit der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

7. Übertragen Sie die seither gemachten Erfahrungen auf Kongruenzabbildungen.

a) Wie hängen die beiden Koordinatensysteme voneinander ab?

b) Wie können Sie eine Spiegelung realisieren?

c) Wie können Sie eine Verschiebung realisieren?

d) Wie können Sie eine Halbdrehung realisieren?

e) Wie können Sie grundsätzlich eine Drehung realisieren?

f) Wie lautet die Abbildungsmatrix einer Drehung um den Winkel α?

8. In Cinderella werden Ähnlichkeiten über die Menüoption MODI / TRANSFORMATION / ÄHNLICHKEIT erzeugt, dabei müssen zwei zugeordnete Punktepaare angegeben werden.

a) Erstellen Sie in Cinderella ein Abbildungsobjekt für eine Ähnlichkeitsabbildung und bilden Sie damit ein Dreieck ab. Verändern Sie die der Ähnlichkeit zugrundeliegenden Punkte und vergleichen Sie jeweils Urbild und Bild.

b) Finden Sie heraus, wie man in Cinderella eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z auf der Basis einer solchen Ähnlichkeitsabbildung erzeugen kann, wobei der Streckfaktor k variabel sein soll.

9. Überprüfen Sie konstruktiv mit Hilfe von Cinderella das Ergebnis der folgenden Verknüpfungen von Dilatationen:

a) Zentrische Streckung mit Verschiebung

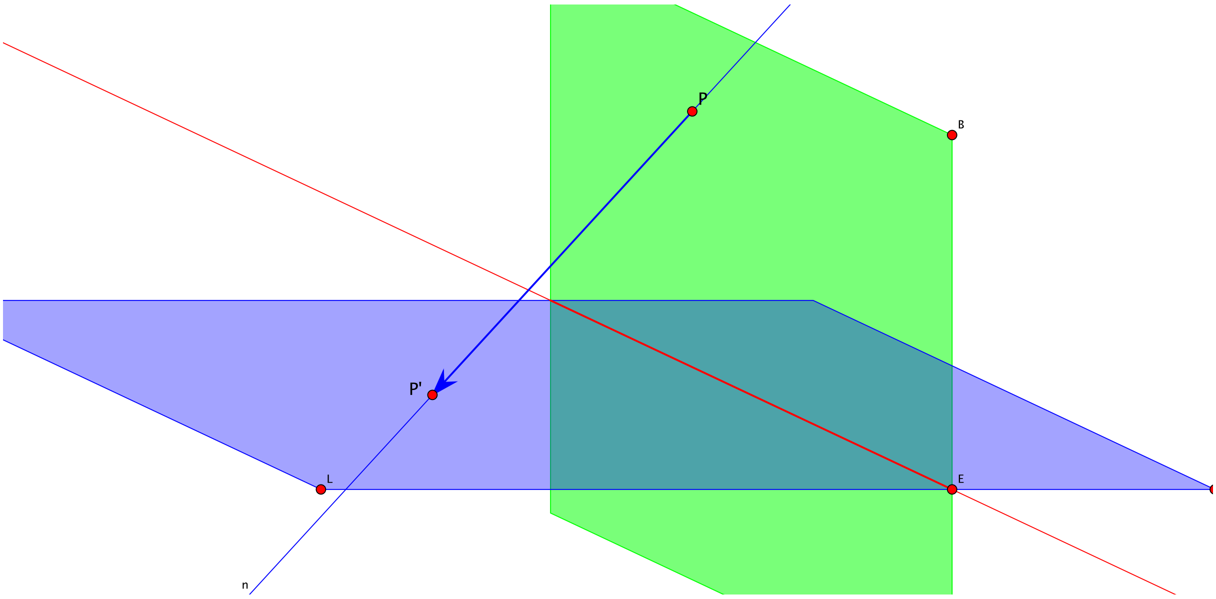
b) Verschiebung mit zentrischer Streckung

c) Zwei zentrische Streckungen am selben Zentrum

d) Zwei zentrische Streckungen an verschiedenen Zentren

uebung_abb_geo_11_l.docx: Affine Abbildungen

1. Affine Abbildungen können anschaulich durch die Abbildung zwischen zwei sich schneidenden affinen Ebenen dargestellt werden, die nicht parallel zueinander liegen, sondern sich entlang einer Geraden a schneiden. Die Punkte der Originalebene ε werden dabei durch eine Parallelprojektion mit der Projektionsrichtung $\vec{p}$ auf die Punkte der Bildebene ε′ abgebildet. Am besten stellen wir uns eine vertikale (grüne) Originalebene und eine horizontale (blaue) Bildebene vor:



Gegeben ist darin die Parallelprojektion, welche den Punkt *P* auf sein Bild *P*′ abbildet. Jeder weitere Punkt aus der Originalebene kann nun abgebildet werden, indem man durch ihn eine Parallele zur Abbildungsrichtung legt und den Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Bildebene feststellt. Für die nachfolgenden Aufgaben ist die Überlegung hilfreich, welche Eigenschaft die Schnittgerade der beiden Ebenen hat. Drucken Sie die Anlage zu dieser Übung aus und konstruieren Sie auf diesem Blatt auf der Basis der gegebenen Abbildungsvorschrift ...

a) ... zu einem gegebenen Punkt *Q* in ε dessen Bildpunkt *Q*′ in ε′.

b) ... zu einem gegebenen Punkt *R*′ in ε′ dessen Urbildpunkt *R* in ε.

c) ... zu einer gegebenen Geraden *s* in ε deren Bildgerade *s*′ in ε′.

d) ... zu einer gegebenen Geraden *s*′ in ε′ deren Urgerade *s* in ε.

e) ... die Bilder *g*′ und *h*′ zu zwei gegebenen Parallelen *g* und *h*.

f) ... zu einer äquidistanten Punktereihe B_1, B_2, B_3, ... auf einer Geraden *b* deren Bilder.

g) Welches sind Fixobjekte bei dieser Abbildung?

2. Weisen Sie nach, dass affine Abbildungen zu den Kollineationen gehören.

3. Weisen Sie nach, dass affine Abbildungen parallelentreu sind.

4. Unterscheiden Sie die Eigenschaften *streckenverhältnistreu* und *teilverhältnistreu*.

5. Geben Sie die Achse *a* und den Winkel einer schiefen Achsenaffinität beliebig vor. Wählen Sie ebenso beliebig einen Punkt *P*, den Sie anhand Ihrer gemachten Vorgaben (Achse, Winkel) sowie dem Verhältnis $q = P'S:PS = 3$ abbilden. *S* sei der Schnittpunkt der

Spurgeraden von PP' und der Achse a. Bilden Sie P außerdem unter den Verhältnissen 1/2, –4 und –1/3 ab.

6. Bei einer *schiefen Achsenaffinität* sind die Achse a und ein zugeordnetes Punktepaar P und P' gegeben.

a) Bilden Sie unter ausschließlicher Verwendung eines (Parallel-)Lineals einen gegebenen Punkt Q ab, der auf derselben Seite von a liegen soll wie P.

b) Wie gehen Sie vor, wenn Q auf der anderen Seite von a liegt?

c) Was tun Sie, wenn P und Q im selben Abstand von a liegen?

d) Was tun Sie, wenn Q auf PP' liegt?

7. Die *schiefe Achsenaffinität* ist ein Spezialfall einer affinen Abbildung. In Cinderella können Sie Affinitäten generell über MODI / TRANSFORMATION / AFFINE TRANSFORMATION erzeugen; Cinderella erwartet dann zur Definition einer affinen Abbildung drei zugeordnete Punktepaare.

a) Zeichnen Sie in Cinderella eine Achse a und ein zugeordnetes Punktepaar P und P'.

b) Definieren Sie dann in Cinderella diejenige schiefe Achsenaffinität, die durch die Achse a und das zugeordnete Punktepaar gegeben ist. Es ist hilfreich, wenn Sie sich überlegen, welche Eigenschaft die Punkte der Achse haben.

c) Überprüfen Sie, wie in der vorhergehenden Aufgabe erarbeitet, ob das von Cinderella erzeugte Abbildungsobjekt tatsächlich die durch die Achse a und das Punktepaar P und P' festgelegte schiefe Achsenaffinität darstellt.

8. Bei einer Scherung ist ein zugeordnetes Punktepaar P und P' gegeben.

a) Bilden Sie unter ausschließlicher Verwendung eines (Parallel-)Lineals einen gegebenen Punkt Q ab, der auf derselben Seite der Scherachse a liegen soll wie P.

b) Bilden Sie ab, wenn Q auf der anderen Seite der Achse liegt.

c) Was ist, wenn Q auf PP' liegt?

d) Was ist, wenn PQ senkrecht auf der Achse steht?

9. Zeichnen Sie in Cinderella eine Scherachse a und ein einer Scherung zugeordnetes Punktepaar P und P'.

a) Definieren Sie dann in Cinderella diejenige Scherung, die durch die Achse a und das zugeordnete Punktepaar gegeben ist. Es ist hilfreich, wenn Sie sich überlegen, welche Eigenschaft die Punkte der Achse haben.

b) Überprüfen Sie, wie in der vorhergehenden Aufgabe erarbeitet, ob das von Cinderella erzeugte Abbildungsobjekt tatsächlich die durch die Achse a und das Punktepaar P und P' festgelegte Scherung darstellt.

10. Was kann bei einer affinen Abbildung aus den folgenden Figuren entstehen?

rw. Dreieck	gls. Dreieck	glsch. Dreieck	bel. Dreieck
Quadrat	Raute	Rechteck	Parallelogramm
Trapez	Drachenviereck	Kreis	regelm. Sechseck

Überprüfen Sie Ihre Vermutungen mit Hilfe von Cinderella!

11. Eine beliebig hohe Säule wird mit einer Ebene geschnitten. Welche Form kann die Schnittfläche haben, wenn die Grundfläche der Säule jeweils die Form einer der oben beschriebenen Figuren hat?

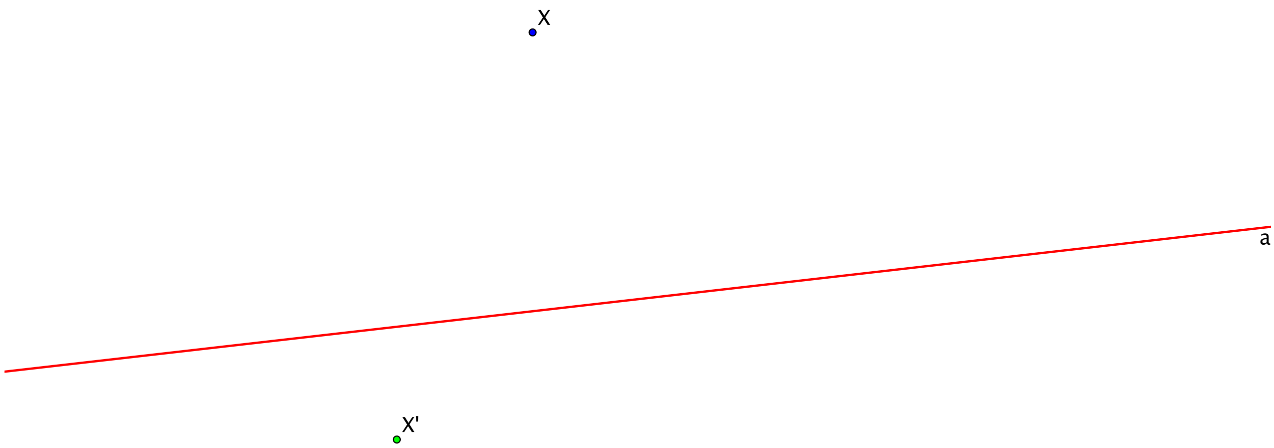
12. Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Seiten weder parallel noch senkrecht zur Achse liegen. Weisen Sie anhand der Abbildung dieses Dreiecks nach, dass ...

a) eine Scherung flächeninhaltstreu ist.

b) eine Schrägspiegelung flächeninhaltstreu ist.

13. Weisen Sie nach, dass alle Dreiecke zueinander affin sind!

14. Gegeben sind die Achse a einer Achsenaffinität und ein zugeordnetes Punktepaar X und X'.



a) Entnehmen Sie der Zeichnung den die Abbildung bestimmenden Winkel und das Abbildungsverhältnis q.

b) Konstruieren Sie in der obigen Zeichnung zwei in X senkrecht aufeinander stehende Geraden g und h, deren Bilder g' und h' sich in X' ebenfalls senkrecht schneiden.

15. Geben Sie sich selbst die Achse a einer Achsenaffinität und ein zugeordnetes Punktepaar P und P' vor. Zeichnen Sie eine weitere Achse b parallel zu PP' und ein dieser Achse b zugeordnetes Punktepaar Q und Q', wobei QQ' parallel zur Achse a sein soll. (Es bleibt Ihnen überlassen, ob Sie diese Aufgabe mit Papier und Bleistift oder mit Hilfe von Cinderella lösen.)

a) Bilden Sie ein beliebiges Dreieck ABC mit der durch P und P' gegebenen Achsenaffinität an a ab.

b) Bilden Sie das entstandene Bilddreieck $A'B'C'$ mit der durch Q und Q' gegebenen Achsenaffinität an b ab.

c) Bilden Sie das Ausgangsdreieck ABC mit der durch Q und Q' gegebenen Achsenaffinität an b ab.

d) Bilden Sie das entstandene Bilddreieck $A^*B^*C^*$ mit der durch P und P' gegebenen Achsenaffinität an a ab.

e) Was stellen Sie fest? Überprüfen Sie Ihre Vermutung durch einige weitere entsprechend gelagerte Beispiele (Spurgerade der einen Achsenaffinität ist parallel zur Achse der anderen Abbildung)!

f) Ist die gemachte Entdeckung völlig neu für Sie?

Abschließend noch einige anspruchsvollere Aufgaben:

16. In einer vorhergehenden Aufgabe haben Sie nachgewiesen, dass alle Dreiecke zueinander affin sind. Dies heißt, dass mit der Vorgabe eines Urbild- und eines Bilddreiecks eine zugehörige affine Abbildung festgelegt ist. Auch Cinderella erwartet für die Festlegung einer affinen Abbildung drei zugeordnete Punktepaare. Für die Lösung der folgenden Aufgabe müssen Sie die Invarianten der affinen Abbildung zur Anwendung bringen:

a) Zeichnen Sie zwei beliebige Dreiecke (zuvor siehe d). Benennen Sie das eine mit PQR und das andere mit $P'Q'R'$. Damit ist nach der obigen Aussage eine affine Abbildung α eindeutig festgelegt.

b) Zeichnen Sie einen beliebigen Punkt S.

c) Bilden Sie diesen Punkt S durch die mit Hilfe der beiden Dreiecke festgelegten affinen Abbildung α konstruktiv ab. Konstruktiv bedeutet: Ausschließlich mit Zirkel und Lineal! Notieren Sie Ihre Konstruktionsschritte nachvollziehbar.

d) Sie können Ihre Konstruktion überprüfen, wenn Sie die Eckpunkte der Dreiecke und den Punkt S auf ganzzahlige Koordinaten legen und diese auch in Cinderella zeichnen. Dann legen Sie in Cinderella die affine Abbildung über die beiden Dreiecke fest und bilden den Punkt S ab. Aus der Lage von S' können Sie Ihre Konstruktion in einem Koordinatensystem mindestens näherungsweise verifizieren.

17. *Die Seitenhalbierenden (Schwerelinien) eines Dreiecks schneiden sich alle in einem Punkt – dem Schwerpunkt des Dreiecks. Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.* Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe einer affinen Abbildung, beantworten Sie dazu folgende Fragen:

a) Welche geometrischen Objekte, Zusammenhänge usw. spielen bei dem genannten Satz eine Rolle?

b) Was sind die Invarianten einer affinen Abbildung?

c) Sind alle Dreiecke zueinander affin?

d) Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck und beweisen Sie den genannten Satz anhand dieses Spezialfalls.

e) Wie kann nun der Beweis des Satzes für ein allgemeines Dreieck erfolgen?

uebung_abb_geo_12_1.docx: Affine Abbildungen berechnen

1. Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem fünf Punkte mit den Koordinaten:
A: [–2, –1]
B: [6, –1]
C: [6, 5]
D: [2, 8]
E: [–2, 5]
und verbinden Sie die Punkte in der genannten Reihenfolge zu einem Streckenzug.

a) Zeichnen Sie nun ein affines Koordinatensystem: Die x-Achse soll horizontal von links nach rechts verlaufen. Die y-Achse soll mit der x-Achse einen Winkel von 60° einnehmen. Die Längeneinheit auf der x-Achse betrage 2, die Längeneinheit auf der y-Achse legen Sie auf 0,5 fest. Tragen Sie die oben genannten Punkte mit deren Koordinaten in dieses Koordinatensystem ein und verbinden Sie die Punkte in der genannten Reihenfolge zu einem Streckenzug.

b) Welche Beziehung besteht zwischen den Figuren in beiden Koordinatensystemen?

2. Zeichnen Sie wieder ein kartesisches Koordinatensystem und tragen Sie dort den Punkt A:[1, 1] ein.

a) Überlagernd zeichnen Sie ein affines Koordinatensystem: Dieses hat seinen Ursprung ebenfalls im Ursprung des kartesischen Systems. Die x-Achse und deren Einheit wird vom Vektor $e_1 : \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ festgelegt, d.h., sie legen die x-Achse des affinen Systems durch den (gemeinsamen) Ursprung O und den Punkt P:[6, 1] des kartesischen Systems. Der Abstand OP ist die Einheit der x-Achse des affinen Systems.

b) Die y-Achse des affinen Systems wird vom Vektor e_2: $e_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ festgelegt: Zeichnen Sie durch den Punkt Q:[1, 2] des kartesischen Systems die Gerade OQ, dies ist die y-Achse des affinen Systems. Der Abstand OQ ist die Einheit auf dieser y-Achse.

c) Zeichnen Sie den Punkt A' mit seinen Koordinaten [1, 1] in das affine System ein. Wie lauten die Koordinaten von A' im kartesischen System? Lesen Sie ab!

d) Wie können diese kartesischen Koordinaten von A' aus seinen affinen Koordinaten [1, 1] und den Einheitsvektoren e_1 und e_2 berechnet werden?

e) Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten des Punktes B, welcher die Koordinaten [3, 2] im affinen System hat.

f) Versuchen Sie – ggf. unter Zuhilfenahme weiterer, selbst gewählter Punkte – eine Rechenregel zu finden, mit deren Hilfe Sie aus den Einheitsvektoren des affinen Systems und den gegebenen affinen Koordinaten die zugehörigen Koordinaten im kartesischen System berechnen können. Formulieren Sie diese Rechenregel mit den Mitteln der linearen Algebra!

3. Nun sei das affine System, welches wiederum von den Einheitsvektoren $e_1 : \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $e_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ aufgespannt wird, noch um den Vektor $\vec{v} : \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ aus dem kartesischen System verschoben. Dies bedeutet lediglich, dass das bereits in der vorigen Aufgabe gezeichnete affine System mit seinem Ursprung im Punkt V:[2, 3] des kartesischen Systems zu liegen kommt.

a) Zeichnen Sie wieder den Punkt A:[1, 1] in das affine System ein, lesen Sie dessen Koordinaten im kartesischen System ab und überlegen Sie, wie Sie diese Koordinaten hätten errechnen können.

b) Dasselbe machen Sie mit dem Punkt B: [3, 2].

c) Versuchen Sie schließlich, Ihre zuvor gefundene Rechenvorschrift so zu ergänzen, dass sie auch den Fall einer Verschiebung des affinen Systems abdeckt.

4. Gegeben ist die Abbildungsmatrix $\begin{bmatrix} 13 & 27 \\ 31 & 17 \end{bmatrix}$ und der Verschiebungsvektor $\begin{bmatrix} 32 \\ 57 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Bilder der Punkte $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$.

5. Zum Knobeln: Die Punkte P: $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ und P': $\begin{bmatrix} -39 \\ -31 \end{bmatrix}$ sowie Q: $\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ und Q': $\begin{bmatrix} 87 \\ 162 \end{bmatrix}$ und letztlich R: $\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$ und R': $\begin{bmatrix} 259 \\ 271 \end{bmatrix}$ sind zugeordnete Punktepaare einer affinen Abbildung.

a) Wie können Sie die maßgeblichen Größen der zugrundeliegenden affinen Abbildung (Abbildungsmatrix und Verschiebungsvektor) grundsätzlich ermitteln?

b) Wie lauten diese Kenngrößen im vorliegenden Fall?

6. In Cinderella wird eine affine Abbildung über drei zugeordnete Punktepaare definiert. Welche Punkte(paare) müssen einander zugeordnet werden, um grundsätzlich die affine Abbildung aus einem kartesischen in ein affines System nachzubilden?

7. Die Gruppe der affinen Abbildungen enthält als Untergruppe die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen, diese wiederum als Untergruppe die Gruppe der Kongruenzabbildungen. Wie muss das affine Koordinatensystem beschaffen sein (Einheiten, Winkel zwischen den Achsen), damit Kongruenzabbildungen (Achsenspiegelungen, Verschiebungen, Drehungen) bzw. Ähnlichkeiten (zentrische Streckungen) erzeugt werden?

8. Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeitsabbildungen und affine Abbildungen können jeweils durch eine spezielle Abbildungsmatrix festgelegt werden.

a) Gesucht sind nachfolgend Abbildungsmatritzen, welche die jeweils angegebene Abbildung erzeugen. Überlegen Sie daher zunächst, wodurch eine Abbildungsmatrix festgelegt ist!

b) Überlegen Sie weiter in Anlehnung an Aufgabe 6, welche Objekte bei der Definition einer Affinität aufeinander abgebildet werden!

Geben Sie nun konkret die jeweilige Abbildungsmatrix an, welche ...

c) eine Achsenspiegelung an der x-Achse erzeugt.

d) eine Achsenspiegelung an der y-Achse erzeugt.

e) eine Punktspiegelung am Ursprung erzeugt.

f) eine Drehung um 30° erzeugt.

g) eine Drehung um den Winkel α erzeugt.

h) eine zentrische Streckung vom Ursprung aus mit dem Faktor 3 erzeugt.

i) eine zentrische Streckung vom Ursprung aus mit dem Faktor –0,5 erzeugt.

j) Nun zu speziellen affinen Abbildungen. Stellen Sie zunächst fest, welche Besonderheit alle folgenden Abbildungen miteinander gemeinsam haben.

k) Was bedeutet diese Erkenntnis für die Suche nach der Abbildungsmatrix?

Für die folgenden Aufgabenteile sind Skizzen unabdingbar! Geben Sie die Abbildungsmatrix an, welche ...

l) eine Scherung mit der x-Achse als Scherachse erzeugt, bei welcher eine senkrecht zur Scherachse stehende Gerade auf eine Gerade abgebildet wird, welche die Scherachse unter einem Winkel von 60° schneidet.

m) eine Scherung mit der x-Achse als Scherachse erzeugt, bei welcher eine senkrecht zur Scherachse stehende Gerade auf eine Gerade abgebildet wird, welche die Scherachse unter einem Winkel α schneidet.

n) eine Schrägspiegelung mit der x-Achse als Spiegelachse erzeugt, bei welcher die Spurgeraden einen Winkel von 135° mit der Achse einschließen.

o) eine schiefe Achsenaffinität mit der x-Achse als Achse erzeugt, bei welcher die Spurgeraden einen Winkel von 121° mit der x-Achse einschließen und das Abbildungsverhältnis $\frac{P'S}{PS} = -4$ ist.

p) eine schiefe Achsenaffinität mit der x-Achse als Achse erzeugt, bei welcher die Spurgeraden einen Winkel von 45° mit der x-Achse einschließen und das Abbildungsverhältnis $\frac{P'S}{PS} = 4$ ist.

Sie dürfen Ihre Ergebnisse gerne mit Cinderella erarbeiten und überprüfen! Hilfreich ist zudem die Bearbeitung der beiden vorausgehenden Aufgaben.

uebung_abb_geo_13_1.docx: Projektive Abbildungen

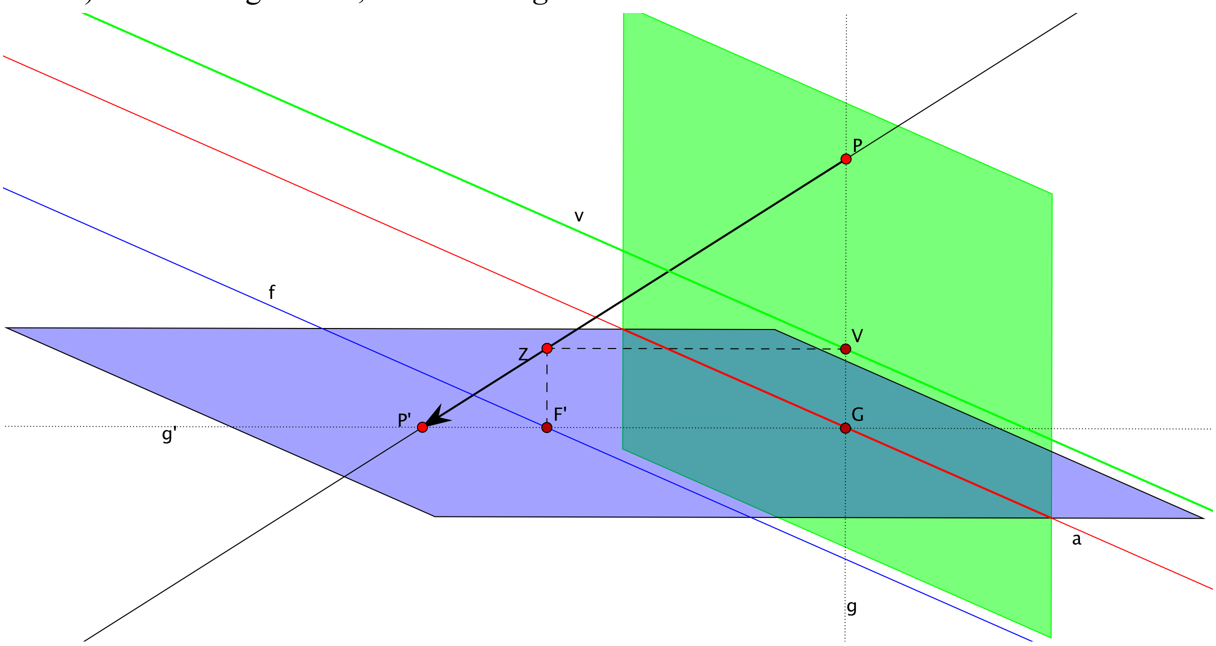
1. Gegeben sei die in der Skizze dargestellte Abbildung durch Zentralprojektion mit dem Zentrum Z aus der Originalebene ε in die Bildebene ε'. P' ist dabei das Bild von P. Konstruieren Sie ...

a) ... zum Punkt Q dessen Bild Q'.

b) ... zu einer Geraden h deren Bild h'. Wählen Sie dabei h parallel zu g.

c) Wie bewegt sich P', wenn P auf g wandert?

d) Wie bewegt sich P, wenn P' auf g' wandert?



2. Wenn Sie – wie in 1 c) und d) gefordert – P auf g bzw. P' auf g' wandern lassen, welche konkreten Probleme treten dann auf?

a) Für welche weiteren Orte tritt genau dieses Problem ebenfalls auf?

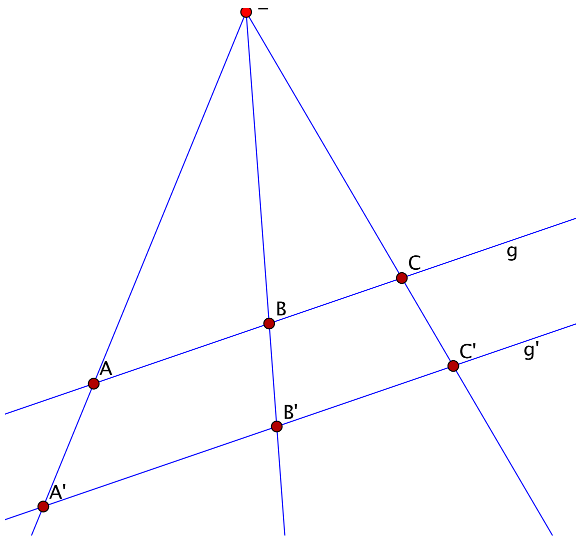
b) Darf man dann überhaupt bei der in Aufgabe 1 dargestellten Konstruktionsvorschrift von einer Abbildung sprechen?

c) Wählen Sie irgendeinen beliebigen Punkt Q auf der grünen Geraden v und zeichnen Sie in die grüne Bildebene zwei Geraden m und n, welche sich in Q schneiden. Bilden Sie beide Geraden m und n in die blaue Bildebene ab. Was stellen Sie fest? Nötigenfalls wiederholen Sie das Ganze für eine andere Lage des Punktes Q auf v oder erledigen Sie dies dynamisch in Cinderella, so das Sie Q auf v verschieben können.

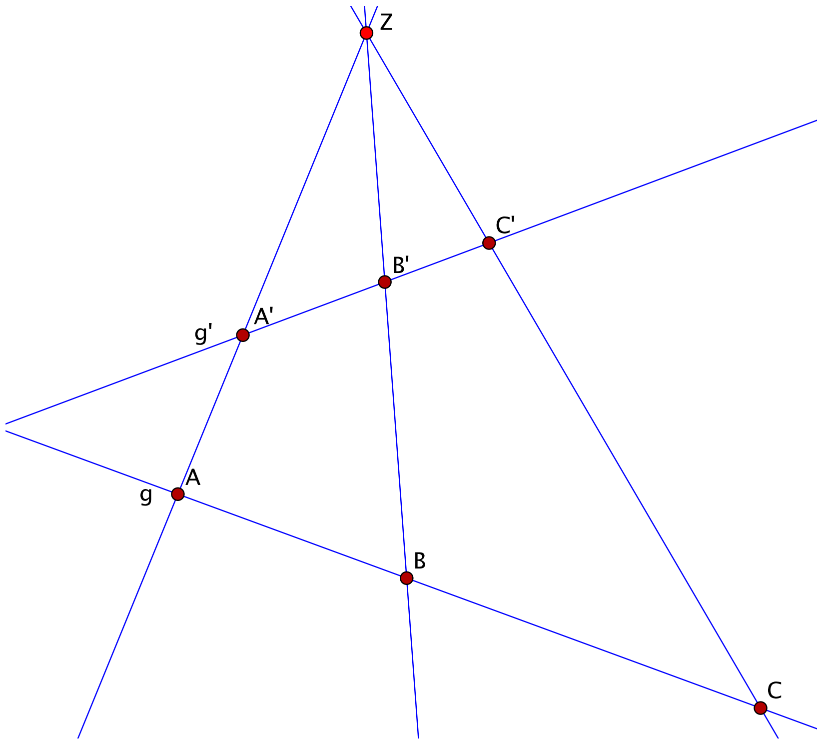
d) Wie wird dieses in a) und b) angesprochene Dilemma gelöst?

3. Begründen Sie, warum die Projektion ebenfalls eine Kollinearität ist.

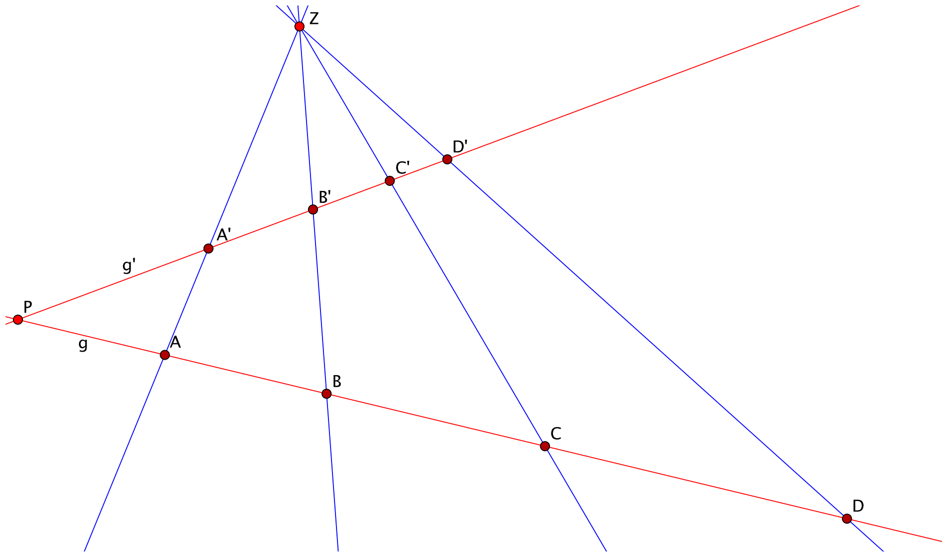
4. Weisen Sie nach, dass bei der dargestellten Perspektive, bei welcher die Gerade g auf eine zu ihr parallele Gerade g' abgebildet wird, die Teilverhältnisse erhalten bleiben.



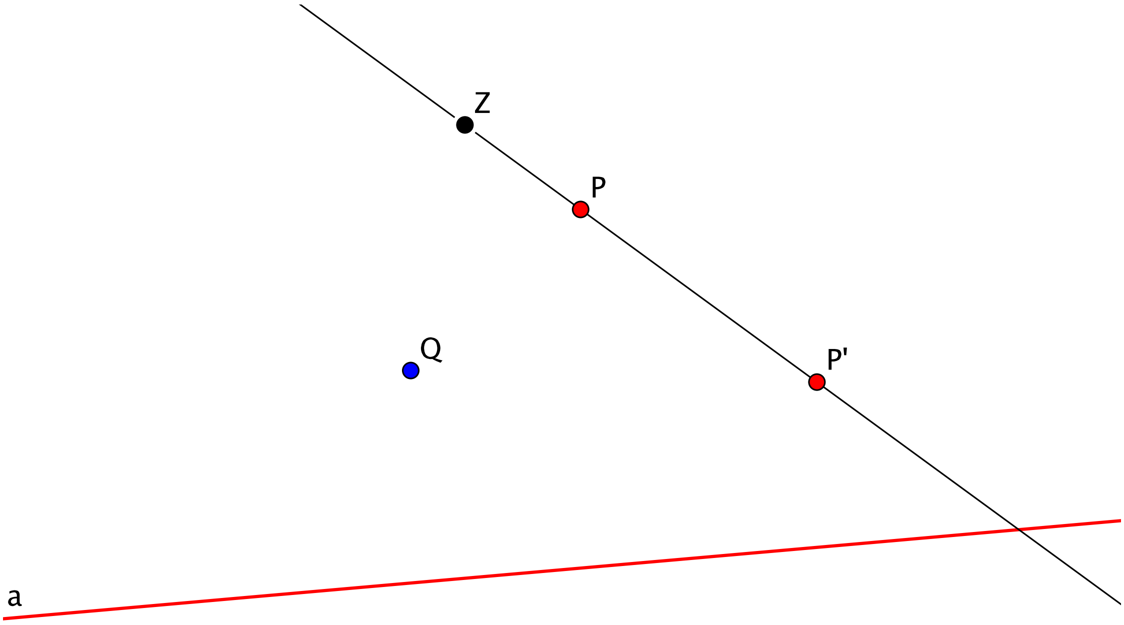
5. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Teilverhältnisse auch im folgenden Fall erhalten bleiben, wenn die beiden Geraden nicht parallel zueinander sind:



6. Zeichnen Sie die folgende Figur sauber und in großen Maßstab – oder konstruieren Sie diese in Cinderella. Bestimmen Sie die Doppelverhältnisse ($ABCD$) und ($A'B'C'D'$).



7. Von einer Perspektivität ist die Achse a und das Zentrum Z gegeben. Außerdem ein zugeordnetes Punktepaar P und P'. Konstruieren Sie nur mit dem Lineal das Bild eines gegebenen Punktes Q.



8. Wie in der vorhergehenden Aufgabe ist die Achse a und das Zentrum Z sowie ein zugeordnetes Punktepaar P und P' einer projektiven Abbildung gegeben. Konstruieren Sie die Bilder zweier parallelen Geraden unter der gegebenen Projektivität.

9. Cinderella benötigt zur Festlegung eines Abbildungsobjekts für eine ebene Perspektivität über MODI/TRANSFORMATION/PROJEKTIVE TRANSFORMATION vier zugeordnete Punktepaare. Welche Punktepaare geben Sie an?

10. Überlegen Sie, welche Bilder symmetrische Figuren unter einer ebenen Perspektivität haben. Begründen Sie jeweils Ihre Vermutungen!

a) Welches sind Bilder gleichseitiger Dreiecke?

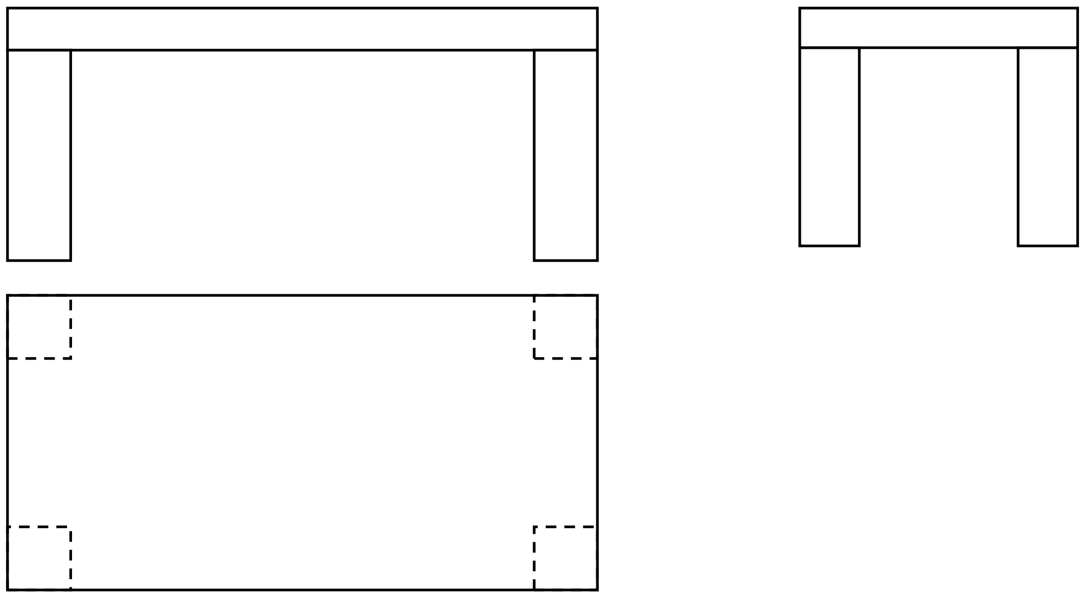
b) Welches sind Bilder von Quadraten?

c) Welche Bilder hat ein Kreis?

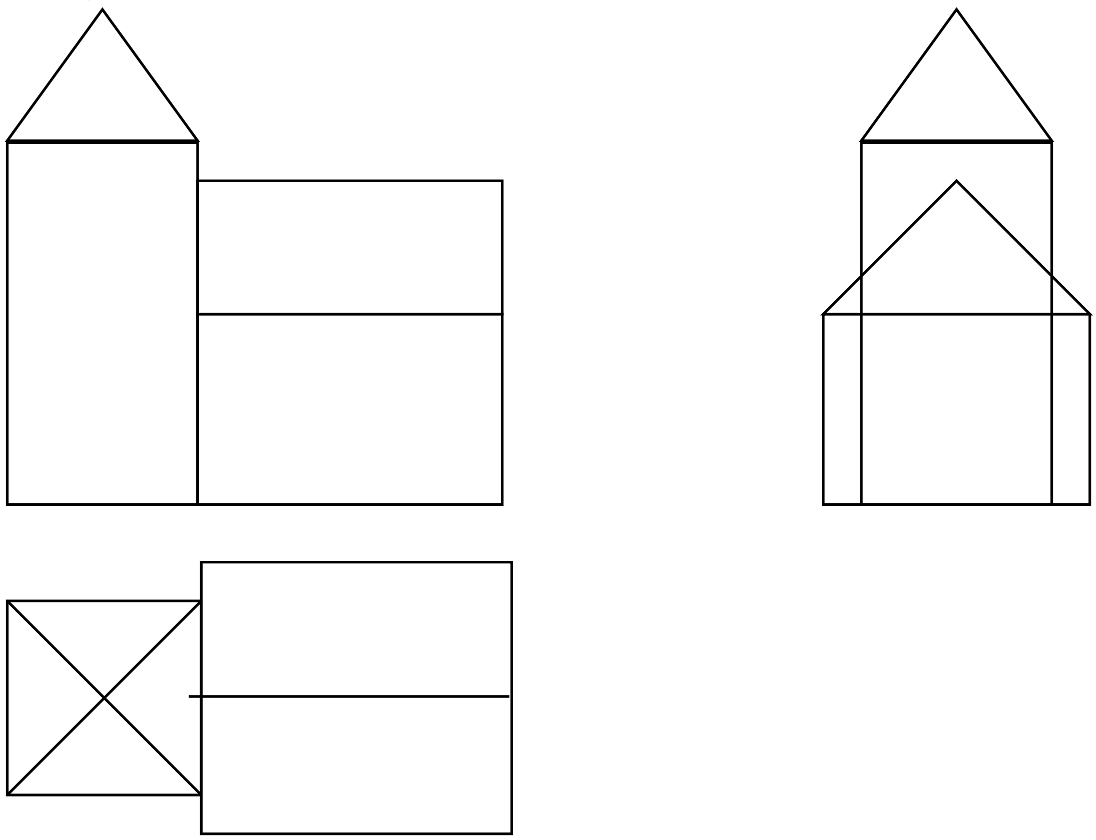
d) Überprüfen Sie schließlich Ihre Vermutungen mit Hilfe von Cinderella. Mussten Sie Ihre Ansichten revidieren?

11. Skizzieren Sie die folgenden, in der Dreitafelprojektion dargestellten Objekte perspektivisch. Experimentieren Sie dabei mit der Lage des Horizonts (Frosch- / Vogelperspektive) und der Lage der Fluchtpunkte.

a) Tisch:



b) Kirche:



uebung_abb_geo_14_l.docx: Konforme Abbildungen

1. Gegeben ist die Inversion am Einheitskreis. Welche Fixobjekte hat diese Abbildung?

2. Im Folgenden werden Sie der Frage nachgehen, ob es bei der Inversion am Einheitskreis auch Fixkreise gibt, also Kreise, die (nicht unbedingt punktweise) auf sich selbst abgebildet werden.

a) Rekapitulieren sie zunächst die Abbildungsvorschrift für die Inversion eines Punktes P am Einheitskreis.

b) Informieren Sie sich über den Sekantensatz.

c) Spiegeln Sie konkret einen (beliebigen) Punkt P am Einheitskreis in seinen Bildpunkt P'.

d) Der Punkt M sei die Mitte zwischen P und P'. Zeichnen Sie um M einen Kreis k mit dem Radius MP.

e) Begründen Sie, warum dieser Kreis k ein Fixkreis der Inversion am Einheitskreis ist. Zeichnen Sie neben der Geraden durch den Ursprung und P eine weitere Gerade durch den Ursprung, welche den Kreis k in zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet.

f) Konstruieren Sie vom Ursprung aus eine Tangente, welche den Kreis k im Punkt T berührt. Ziehen Sie für die Rechnung nun den Sekanten-Tangentensatz heran.

g) Welche besondere Lage hat die Tangente t offensichtlich? Überprüfen Sie diese Lage auch auf der anderen Seite des Kreises bzw. mit Hilfe eines dynamischen Geometriesystems.

h) Was würde es für die eingangs gestellte Suche nach Fixkreisen der Inversion am Einheitskreis bedeuten, wenn die vermutete besondere Lage der Tangente allgemeingültig wäre?

i) Schaffen Sie es, die soeben festgestellte besondere Lage der Tangente t allgemein nachzuweisen? Das ist algebraisch durchaus etwas aufwändig...! Es ist aufgrund der Drehsymmetrie des Kreises ausreichend, wenn Sie den Nachweis mit Hilfe der eben durchgeführten Konstruktion führen, bei welcher P, P' und M auf der x-Achse liegen.

j) Falls Sie keine Lust auf viel Algebra haben: Wenn man den Kreis

$$(x-x_M)^2+y^2=r^2$$

am Einheitskreis spiegelt, dann erhält man die Gleichung:

$$\left(x+\frac{x_M}{(r^2-x_M{}^2)}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{r^2-x_M{}^2}\right)^2$$

Wann (unter welcher Bedingung) sind beide Kreise gleich?

k) Interpretieren Sie diese Bedingung geometrisch!

l) Welche Erkenntnisse ziehen Sie schließlich daraus?

3. Gegeben ist ein Kreis k mit seinem Mittelpunkt M genau im Ursprung des Koordinatensystems mit dem Radius 5. Eine Abbildung an diesem Kreis sei in Anlehnung an die Achsenspiegelung folgendermaßen definiert:

- Eine Gerade g durch den abzubildenden Punkt P und M schneidet den Kreis immer in zwei Punkten X_1 und X_2.
- Man schlägt um den zu P nächstgelegenen Schnittpunkt X_1 einen weiteren Kreis m mit dem Radius X_1P.
- Dieser Kreis m schneidet die Gerade g in zwei Punkten: Der eine Schnittpunkt ist natürlich P und der andere Schnittpunkt sei dessen Bildpunkt P'.

a) Zeichnen Sie die vorgegebene Situation (Koordinatensystem, Kreis k) und skizzieren Sie das Bild der Geraden h, welche durch die Punkte [0 ,6] und [6, 0] verläuft.

b) Ist diese Abbildung eine Kollineation?

c) Hat diese Abbildung Fixpunkte? Falls ja, welche?

d) Ist diese Abbildung bijektiv?

4. Erstellen Sie in Cinderella selbst eine Möbius-Transformation.

a) Erzeugen Sie dafür zunächst die vier Punkte A, B C und D und positionieren Sie diese ganz in der Nähe des Koordinatenursprungs.

b) Dann rufen Sie MODI/TRANSFORMATION/FUNKTION auf und klicken irgendwo auf das Arbeitsblatt. Es erscheint ein Eingabefenster, in welches Sie den folgenden Term genau eingeben:

```
(complex(A) * complex(#) +complex(B))/(complex(C) * complex(#) +complex(D))
```

Abschließend klicken Sie OK, worauf ein Funktionsobjekt mit der Aufschrift `Funct` erscheint. (Die Funktion `complex()` sorgt dafür, dass die Koordinaten der Punkte in komplexe Zahlen umgewandelt werden.) Durch Positionieren der Punkte A bis D können Sie somit die Funktionsparameter, also die komplexen Zahlen a, b, c und d der Möbius-Transformation $z \to \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ flexibel einstellen.

c) Erzeugen Sie einen weiteren Punkt Z und färben Sie diesen blau.

d) Bilden Sie Z durch das eben erzeugte Funktionsobjekt ab. (Z markieren und einmal auf das Funktionsobjekt klicken)

e) Machen Sie die Punktgröße des erzeugten Bildpunkts etwas kleiner.

f) Klicken Sie dann (bei markiertem Bildpunkt) mit Geduld und Ausdauer einige hundert Mal auf das Funktionsobjekt. Jedes Mal wird der Bildpunkt des zuvor erzeugten Bildpunkts erzeugt, also die definierte Funktion einige hundert Mal verkettet. Klicken Sie weiter auf das Funktionsobjekt, auch wenn Sie (zwischendurch) die dadurch erzeugten Bildpunkte nicht mehr auf dem Bildschirm sehen!

g) Den Lohn Ihrer Mühe sehen Sie, wenn Sie hernach die Parameter der Möbiustransformation – die Punkte A bis D – einzeln und vorsichtig(!!!) verschieben.